TÜ TEADUSKOOL

# VÕRRATUSED
# KOLMNURGA JA NELINURGA VÕRRATUSED

*Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks II*

*Koostanud Raili Vilt*

# VÕRRATUSED

Kord on elu alus, ütleb vanasõna. Lohakalt vedelevad asjad ja ärarebenenud nööbid jätavad ebameeldiva mulje ning muudavad meie igapäevase elu raskemaks. Korda võib väga mitmesugustest seisukohtadest lähtudes luua ja hoida. Näiteks nööbid peavad sobima üksteise ja nööpaukudega. Objekte saab korrastada, järjestada mitmeti. Õpilasi saab järjestada järgmiste tunnuste järgi: pikkus, kaal, õppeedukus, vanus jne .

Järjestuse märkimiseks kasutatakse matemaatilisi märke $<$ , $>$ , $\geq$ , $\leq$ .

$a > b$ st., et vaadeldava järjestuse aluse korral on a suurem, parem kui b.

Kui vaadelda õpilaste pikkusi, siis kirjutis $a \geq b$, tähendab, et õpilane a on kas õpilasega b ühepikkune või pikem.

**Näide 1.** Sirje peab oma 15. sünnipäeva ja on külla kutsunud neli sõbrannat - Juta, Tiina, Pireti ja Lea. Kohvilauas naljatatakse omavahel.

(1) Sirje: “Saa kõigepealt nii vanaks kui mina, Piret.”

(2) Juta: “Sirje, ära kiitle! Ehkki sul on täna sünnipäev, oled sa minust paar nädalat noorem, täpselt niisama palju, kui mina olen Least noorem.”

(3) Piret: “Ma leian, et sina, Tiina, ei või üldse kaasa rääkida, sest teil on matemaatika alles lapsemäng.”

(4) Tiina: “Juta võiks öelda, et teil on matemaatika alles lapsemäng, aga mitte Piret!”

Proovime, kas nende nelja lause põhjal saab tüdrukuid järjestada vanuse järgi. Et paremat ülevaadet saada, kirjutame nime asemel nime algustähe ja sõnade “on vanem kui” asemel märgi >.

Esimesest lausest saame teada, et Sirje on vanem kui Piret, lühidalt: $S > P$ (1)

Lause (2) annab meile $J > S$ (2a) ja $L > J$ (2b)

Lausest (3) saame $P > T$ (3).

Lause (4) ütleb lõpuks, et $J > T$ (4).

Nüüd pole enam raske viit tüdrukut vanuse järgi õigesse järjekorda panna. Vanim on ilmselt see, kes ridades (1) kuni (4) ei seisa kunagi paremal pool, sest siis pole ju temast vanemaid. See on Lea. Ta on (2b) põhjal Jutast vanem. Juta on (4) ja (2a) põhjal vanem kui Tiina ja Sirje. Sirje on (1) põhjal vanem Piretist ja (3) põhjal on Piret vanem Tiinast. Kokkuvõttes saame: $L > J > S > P > T$. Tiina on järelikult noorim. Kontrollime oma järeldust. T ei seisa ridades (1) kuni (4) kunagi vasakul pool, seega pole Tiina vanem ühestki neljast ülejäänud tüdrukust.

Eelnevas näites tegime järelduse: “Kui Lea on vanem Jutast, siis Lea on vanem Sirjest.” Üldiselt tuleb aga ülesande teksti ja andmete põhjal veenduda, kas võib selliselt järeldada või ei. Näiteks ei pruugi kehtida selline järeldamine võistkondade Karu ja Rebane vahelise korvpallimatši tulemuste ennustamisel. Võime arutleda: kahe nädala eest võitis võistkond Rebane võistkonda Jänes, kuu aja eest aga Jänes võitis Karu. Järelikult peaks Rebane võitma Karu. Ei tarvitse aga üllatuda, kui võistkond Rebane siiski kaotab, sest siin ei kehti seos kui A on B ees ja B on C ees, siis A on C ees.

**Näide 2.** Kuus maletajat - Malemaa, Malemets, Malemägi, Malepuu, Malejõgi ja Maleorg - tahtsid ühel õdusal õhtul maleklubis endid järjestada mängutugevuse järgi. Selleks pidi igaüks mängima kahe vastasega, kes loositi välja ülejäänud viie hulgast. Mõne aja pärast oli mängude seis selline:
Malemaa võitis Malemäe ja kaotas Malejõele; Malemägi võitis Maleoru ja kaotas Malemaale;
Malejõgi võitis Malemaa ja kaotas Malemetsale; Maleorg võitis Malepuu ja kaotas Malemäele.
Kui palju mänge on juba mängitud? Palju on veel mängida? Siiani on neljal mängijal võrdselt punkte. Järjesta mängijad seniste tulemuste põhjal põhimõttel "kes võitis keda?" täpselt niisamuti, nagu tegime seda tüdrukute järjestamisel vanuse järgi. Missuguse järjestuse saad? Millise tulemuse peaksid andma viimased mängud, et see järjestus leiaks kinnitust?

<u>Lahendus</u>: On öeldud, et kuuest mängijast igaüks mängib kaks mängu, et iga mäng läheb kirja kahele mängijale, siis kokku mängitakse $(6 \cdot 2) : 2 = 6$ mängu. Siiani on mängitud 5 mängu, 1 jääb mängida. Et Maa > Mägi, Jõgi > Maa, Mägi > Org, Mets > Jõgi ja Org > Puu, siis senine paremusjärjestus on Malemets, Malejõgi, Malemaa, Malemägi, Maleorg, Malepuu.
See järjestus jääb püsima, kui viimases mängus Malemets võidab Malepuud. Kui ta aga kaotab variseb kogu järjestus kokku.

## Mida tähendavad väljendid "suurem " ja "väiksem" arvude vallas?

Ütlus "a on suurem kui b" (**$a > b$**), tähendab, et vahe $a - b$ on positiivne arv (**$a - b > 0$**).
Ütlus "a on väiksem kui b"(**$a < b$**) tähendab, et vahe $a - b$ on negatiivne arv (**$a - b < 0$**).
Rangeteks võrratusteks nim. võrratusi $a < b$ ja $a > b$. (Märke > ja < kasutas esimesena oma töödes inglise matemaatik Thomas Harriot (1560-1621)).

Mitterangeteks võrratusteks nim. võrratusi $a \geq b$ ja $a \leq b$, viimane neist tähendab, et kehtib üks seostest $a < b$ või $a = b$.
Kirjutis $a \leq b$, tähendab seda, et arv a ei ole suurem kui b ning et arv b ei ole väiksem kui arv a.

Kaks arvu või kaks avaldist, mis on omavahel seotud märkidega <, >, ≤ või ≥, moodustavad **võrratuse**. Võrratus koosneb kahest poolest - **vasakust** ja **paremast**. Kui võrratuses on märk < või >, räägitakse rangest võrratusest, kui märk on ≤ või ≥ , siis räägitakse mitterangest võrratusest. Võrratuse $a > b$ tõesusest järeldub alati võrratuse $a \geq b$ tõesus. Vastupidine järeldus ei kehti, sest juhul kui $a \geq b$ võib olla ka $a = b$, aga sel korral on ju lause $a > b$ väär.
Et paljude huvitavate ülesannete lahendamiseks on vajalik natuke teada võrratustest, siis vaatlemegi lühidalt võrratuse peamisi omadusi ja kuidas neid kasutada.

# VÕRRATUSTE PÕHIOMADUSED

1) **Kui a > b, siis b < a**;
***** Võrratuse märk muutub vastupidiseks, kui võrratuse pooled vahetada.
näiteks: kui –2 > –3, siis –3 < –2.

2) **Kui a > b ja b > c, siis a > c**;
näiteks: kui –2 > –3 ja –3 > – 4, siis –2 > – 4 .

3) **Kui a > b ja c on suvaline reaalarv, siis a +c > b + c** ja **a – c > b – c,**
***** Võrratuse märk jääb samapidiseks kui võrratuse mõlema poolega liita üks ja sama arv.
Näiteks: 2 > –3; liidame mõlemale poole arvu (–10):
2 + (–10) > –3 + (–10), s.o. –8 > –13; 2 –(–10) > –3 –(–10), s.o. 12 > 7.

4) **Kui a > b ja m on positiivne arv**, siis **am > bm** ja **a : m > b : m.**
***** Võrratuse <u>märk jääb samapidiseks</u> kui võrratuse mõlemat poolt <u>korrutada</u> (jagada) <u>ühe ja sama positiivse arvuga</u>.
Näiteks korrutades võrratuse –5 > –7 pooled (+ 4)-ga, saame: –20 > –28.

5) **Kui a > b ja m on negatiivne arv**, siis **am < bm** ja **a : m < b : m**.
***** Võrratuse <u>märk muutub vastupidiseks</u> kui võrratuse mõlemaid pooli <u>korrutada</u> (jagada) <u>ühe ja sama negatiivse arvuga.</u>
Näiteks korrutades võrratuse –5 > –7 mõlemad pooled arvuga (–1), saame 5 < 7, jättes aga võrratuse märgi muutmata saame 5 > 7, mis aga on vale

6) **Kui a > b ja c > d, siis a + c > b + d**. **Kui a < b ja c < d, siis a + c < b + d.**
Näiteks:

$$\begin{array}{rr} & -7 > -10 \\ + & -3 > -4 \\ \hline & -10 > -14 \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{rr} & 2 < 8 \\ + & -4 < -2 \\ \hline & -2 < 6 \end{array}\ .$$

7) **Kui a > b, aga c < d, siis a – c > b – d**. **Kui a < b, aga c > d, siis a – c < b – d.**
Näiteks:

$$\begin{array}{rr} & -8 > -10 \\ - & 2 < 3 \\ \hline & -10 > -13 \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{rr} & 7 < 12 \\ - & 8 > -2 \\ \hline & -1 < 14 \end{array}$$

Võrratusi nimetatakse samapidisteks, kui kummalgi on üks ja seesama märk > või < ja vastupidisteks, kui ühel võrratusel on märk >, teisel aga märk <. Seega kuuendat ja seitsmendat omadust väljendada nii:
*** Kaht samapidist võrratust võib liikmeti liita ja võrratusemärk jääb samapidiseks.**
*** Kaht vastupidist võrratust võib liikmeti lahutada, jättes tulemuses selle võrratuse märgi, millest lahutati teine võrratus.**

Kui mõni omadus kipub meelest ära või segamini minema, on neid kerge väikeste arvude ja lihtsate näidetega enda jaoks meelde tuletada.

**Näide 3**. Antud on, et $0 < d < c < a < b$. Põhjenda, et $ad < bc$.

Lahendus: Võime kirjutada, et $a < b$ ja $d < c$. Korrutame neist esimest läbi arvuga d ja teist arvuga b. Kuna on b ja d on positiivsed, siis $ad < bd$ ja $db < bc$. Liites need võrratused, saame $ad + bd < bd + bc$, millest $ad < bc$.
Miks ei kehti negatiivsete arvude korral?

**Näide 4**. Antud on , et $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ ning $c + d < a$ ja $c + d < b$.
Tõesta, et $ac + bd < ab$.

Lahendus: Antud on neli positiivset arvu ja võrratused $c + d < a$ ja $c + d < b$. Antud võrratustest saame $c < a – d$ ja $d < b – c$.
Näitest 3. nägime, et kui võrratuste pooled on positiivsed, siis võib võrratuse pooli liikmeti korrutada. Antud võrratuste pooled on positiivsed,
seega $cd < ab – ac – db – cd$, millest $0 < ab – ac – db$, ehk $ac + db < ab$, mida oligi tarvis tõestada.

**Näide 5.** Arvud $(–7a^4b^2c)$ ja $ab^5c^2$ on erimärgilised. Kas arv a on positiivne või negatiivne, kui on teada, et arvud b ja c on samamärgilised?

Lahendus: Vaatleme kahte võimalikku olukorda

a) $\begin{cases} -7a^4b^2c > 0 \\ ab^5c^2 < 0 \end{cases}$ ja b) $\begin{cases} -7a^4b^2c < 0 \\ ab^5c^2 > 0 \end{cases}$

a) Esimesest võrratusest saame, et $c < 0$ ($a^4$ ja $b^2$ on alati positiivsed) ja järelikult ka $b < 0$. Sel juhul teisest võrratusest saame, et $a > 0$.
b) Esimesest võrratusest saame, et $c > 0$ ja järelikult ka $b > 0$. Siis teisest võrratusest, $a > 0$.
Seega arv a on alati positiivne.

**Näide 6.** Laskevõistluse järel võrdlesid Elke, Regina, Gerd ja Jaan oma tulemusi. Selgus, et
1) Jaan sai rohkem punkte kui Gerd;
2) Elke ja Regina said kokku sama palju punkte kui Jaan ja Gerd kokku;
3) Elke ja Jaan said kokku vähem punkte kui Regina ja Gerd kokku.
Tee kindlaks võistlejate paremusjärjestus.

Lahendus: Tähistame iga võistleja tulemuseks saadud punktide arvu sama tähega, millega algab tema nimi. Siis saab ülesande tingimused kirja panna järgmiselt:
1) $j > g$; 2) $e + r = j + g$ 3) $e + j < r + g$.
Kahe viimase seose liitmisel saame võrratuse $2e + j + r < 2g + j + r$ ehk $e < g$. Et aga $e + r = j + g$, siis peab olema $r > j$. Järelikult $r > j > g > e$.

Võrratuste suhtes (nagu võrdustegi), mis sisaldavad tundmatut, on võimalikud kaht liiki küsimused:

1) **lahendada tundmatut sisaldav võrratus**, st. leida, tundmatu väärtus/väärtused, mille korral antud võrratus kehtib;

Tavaliselt on võrratuse lahendiks teatud vahemik.

Näide: Võrratuse $4 < x < 11$ täisarvulised lahendid on 5, 6, 7, 8, 9, 10 ja ehk kõik täisarvulised lahendid on $5 \leq x \leq 10$.

Näide: $2 + x < 4$

Liidame võrratuse mõlemale poolele arvu –2 ja saame

$$2 + (-2) + x < 4 + (-2)$$

Vastus: võrratuse $2 + x < 4$ lahendid on kõik arvud, mis on väiksemad kui 2 ehk $x < 2$.

Võrratuse lahend võib olla üheselt määratud st. võrratusel võib olla ainult üks arvuline lahend.

Näide: Leia võrratuse $4 < x < 6$ täisarvulised lahendid. Vastus $x = 5$.

(Märkus: Reaalarvulisi lahendeid on võrratusel $4 < x < 6$ rohkem kui üks.)

2) **tõestada võrratuse kehtivus**, s.o. näidata, et ta on kehtiv tundmatu mistahes väärtuste puhul või siis väärtuste puhul, mis on määratud etteantud tingimustega.

Mõlema küsimuse lahendamine põhineb võrratuste omadustel, mis on sarnased võrrandite lahendamise aluseks olevate omadustega.

## SAMAVÄÄRSED VÕRRATUSED

Võrratusi, mis sisaldavad ühtesid ja samu tundmatuid, nimetatakse <u>samaväärseiks,</u> kui neid rahuldavad nende tundmatute ühed ja samad väärtused ühes ja samas määramispiirkonnas. Nii on kaks võrratust $3x + 2 < x + 10$ ja $3x < x + 8$ samaväärsed, sest mõlemaid rahuldavad x väärtused, mis on väiksemad kui 4, ja ainult need väärtused.

Võrratuste samaväärsuse kohta kehtivad teoreemid, mis on üsna sarnased teoreemidega võrrandite samaväärsuse kohta.

**Teoreem 1.** Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlema poolega liidame (või lahutame) ühe ja sama arvu, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

(Tähistame tundmatut sisaldava võrratuse vasaku poole tähega A ja parema poole tähega B; m olgu mistahes arv. Tõestame, et kaks võrratust

$$A > B \qquad (1)$$

ja $$A + m > B + m \qquad (2)$$

on samaväärsed. Selleks tuleb näidata, et võrratuse (1) kõik lahendid on võrratuse (2) lahendid ning, et võrratuse (2) kõik lahendid on võrratuse (1) lahendid. Oletame, et esimest võrratust rahuldavad tundmatu mõned kindlad väärtused. See tähendab, et nende väärtuste puhul on A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus; kuid siis on kolmanda põhiomaduse põhjal tundmatu samade väärtuste korral ka summa A+m arvuline väärtus suurem kui summa B+m arvuline väärus, sest kui võrratuse mõlema

poolega liidame ühe ja sama arvu, siis võrratuse märk ei muutu. Tähendab, võrratuse (1) iga lahend on ka võrratuse (2) lahendiks.
Vastupidi: kui tundmatu teatavate väärtuste korral summa A+m arvuline väärtus on suurem kui summa B+m arvuline väärtus, siis tundmatu samade väärtuste korral on ka A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus (võrratus jääb kehtivaks, kui võrratuse mõlema poolega liidame (–m)); järelikult kõik võrratuse (2) lahendid rahuldavad ka võrratust (1); tähendab, need võrratused on samaväärsed.
Et lahutamine on samaväärne vastupidise arvu liitmisega, siis järeldub sellest, et võrratuse mõlemast poolest võib lahutada ühe ja sama arvu.)

**Järeldus: Võrratuse mistahes liiget võib ühelt poolelt viia teisele poolele vastupidise märgiga.**

**Teoreem 2.** Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame (või jagame) ühe ja sama **positiivse arvuga**, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

**Näide 7.** $-32 + 2x < 18 \quad |: 2$
$-16 + x < 9$

**Teoreem 3.** Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame (või jagame) ühe ja sama **negatiivse arvuga** ning **muudame seejuures võrratuse märgi vastupidiseks**, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

**Näide 8.** $-2x + 18 < 32 \quad |: (-2)$
$x - 9 > -16$

## Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine

Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse üldkuju pärast sulgude avamist on järgmine:

$$ax + b > a_1x + b_1.$$

Viies tundmatud liikmed vasakule poolele ja teada olevad liikmed paremale poolele, saame:

$$(a - a_1)x > b_1 - b.$$

Kui $a - a_1 > 0$, siis jagades võrratuse mõlemad pooled avaldisega $a - a_1$, leiame:

$$x > \frac{b_1 - b}{a - a_1} = m.$$

Kui $a - a_1 < 0$, siis saame: $x < \frac{b_1 - b}{a - a_1} = m$.

Kui $a - a_1 = 0$, siis saame võrratuse $b > b_1$, mis siis on kas tõene iga x korral st. lahenditeks sobivad kõik reaalarvud, või siis väär st. võrratusel lahendid puuduvad.

Seega üks esimese astme võrratus annab tundmatu ühe tõkke, s.o. arvu, mis tõkestab tundmatu väärtust ülaltpoolt ($x < m$) või altpoolt ($x > m$).

**Näide 9.** Lahendada võrratus $2x(2x - 5) - 27 < (2x + 1)^2$.

Lahendus: Avame sulud: $4x^2 - 10x - 27 < 4x^2 + 4x + 1$.
Viime liikmed üle ja koondame sarnased liikmed: $-14x < 28$.
Jagame võrratuse mõlemad pooled arvuga (–14): $x > -2$.

***NB!*** **a)** Muutes võrratuse kõigi liikmete märgid vastupidiseks (s.o. korrutades selle mõlemaid pooli arvuga (–1), peame vastupidiseks muutma ka võrratuse märgi.
**b)** Kui tähelise kordaja märk on kindlalt teada saame võrratust läbi korrutada/jagada, selle kordajaga, arvestades seejuures siis seda, et see ei ole null ja kas ta on positiivne või negatiivne.
**c)** Korrutades võrratuse mõlemaid pooli tähelise kordajaga, mille märk on teadmata, tuleb veenduda, et see ei ole null ja siis vaadelda kahte olukorda:
esiteks – kordaja on positiivne,
teiseks – kordaja on negatiivne.
Kui osutub, et kordaja võib olla ka null, tuleb ka seda olukorda eraldi vaadelda.

**Näide 10.** Leia arvu x võimalikud väärtused, kui $12 < \frac{x}{a}$.

Lahendus: $a \neq 0$, sest muidu ei eksisteeriks murdu.
Kui $a > 0$, siis $x > 12a$
Kui $a < 0$, siis $x < 12a$.

**Näide 11.** Lahenda võrratus $ax - 5 < 0$.

Lahendus: Antud võrratus on samaväärne võrratusega $ax < 5$.
1) kui $a = 0$, siis võrratus kehtib mistahes arvu x väärtuse korral.
2) kui $a < 0$, siis $ax < 5$ on samaväärne võrratusega $x > \frac{5}{a}$, võrratuse märk muutub vastupidiseks, sest a on negatiivne.
3) kui $a > 0$, siis $ax < 5$ on samaväärne võrratusega $x < \frac{5}{a}$, sest a on positiivne.

Vastus: $x \in R$, kui $a=0$; $x > \frac{5}{a}$, kui $a < 0$; $x < \frac{5}{a}$, kui $a > 0$.

## Võrratuste tõestamine

Võrratuse õigsuse määramiseks ei ole kindlat algoritmi. Üldiselt teisendatakse antud võrratus samaväärseks võrratuseks, mille õigsus on ilmne. Lähtudes sellest jõutakse antud võrratuse õigsuse juurde.

### * Vahe hindamine

Definitsiooni kohaselt $a > b$, kui $a - b > 0$. Järelikult tõestamaks, et $a > b$ on tarvis näidata, et
$a - b > 0$.

*** Täisruuduks või täisruutude summaks teisendamine**

**Näide 12**. Tõestada, et $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Lahendus: Vaatleme vahet: $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$. Et mistahes arvu ruut on mittenegatiivne, siis $(a - b)^2 \geq 0$, millest järeldub ka esialgse võrratuse tõesus.
Esialgse võrratusega samaväärsest võrratusest $(a - b)^2 \geq 0$ näeme, et võrdus kehtib ainult siis, kui $a = b$. Seega ka esialgses võrratuses kehtib võrdus ainult siis, kui $a = b$.

**Näide 13.** Tõestada, et $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

Lahendus: Korrutades võrratuse pooli arvuga 2, saame samaväärse võrratuse
$2x^2 - 2xy + 2y^2 \geq 0$ . Teisendame saadud võrratuse vasakut poolt:
$2x^2 - 2xy + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + y^2 = (x - y)^2 + x^2 + y^2$.
Et kõik kolm liidetavat on mittenegatiivsed, siis $(x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$. Kuna esialgse võrratusega samaväärne võrratus kehtib, kehtib ka esialgne.
On selge, et võrdus kehtib vaid siis, kui $x = y = 0$.

**Näide 14**. Tõesta, et reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Lahendus: Võrratus $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, on samaväärne võrratusega
$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$.
Järelikult $a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$.
Siit $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$.
Jõudsime tõese võrratuseni, järelikult oli ka lähtevõrratus tõene.

* Tõestamiste juures on kasulik teada võrratusi kahe positiivse reaalarvu keskmiste kohta

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \max(a,b),$$

kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis kui $a = b$.
(kui $a < b$, siis $\min(a,b) = a$ ja $\max(a,b) = b$)

*** Lähtumine tugivõrratustest või juba tõestatud võrratustest**

**Näide 15**. Tõestada, et mistahes x ja y korral $2x^2 + 2y^2 \geq 3xy$.
Lahendus: Teame, et $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ (näide 13) ja $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (näide 12).
Liidame need kaks võrratust, saame $2x^2 - 3xy + 2y^2 \geq 0$ ehk $2x^2 + 2y^2 \geq 3xy$

## * Liikmeti hindamine

**Näide 16**. Tõestada, et mistahes naturaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>\frac{3}{a+b+c}.$$

Lahendus: Võrratuse parema poole võib kirjutada $\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}$. Kuna a, b ja c on naturaalarvud, siis $\frac{1}{a+b}>\frac{1}{a+b+c}$; $\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c}$; $\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b+c}$. Liites need kolm saadud võrratust, saame $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>\frac{3}{a+b+c}$.

**Oluline on jälgida, mis liiki arvude korral lähtevõrratused ja hindamisel kasutatavad seosed kehtivad.** Näiteks, kui mingi võrratus on tõestatud naturaalarvude korral, ei saa seda kasutada võrratuse tõestamiseks mistahes arvude korral. Näiteks, kui a on naturaalarv, siis $\frac{1}{a}< 0$, kui aga a on ratsionaalarv, siis $\frac{1}{a}$ saab olla suurem kui 0 ($\frac{1}{0{,}01}=100>0$).

<u>* Määramispiirkonna jaotamine</u>

**Näide 17**. Tõestage, et mistahes naturaalarvude a ja b korral $\left(1+\frac{a}{b}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}\right)^3>8$.

<u>Lahendus</u>: Kui a > b, siis esimene liidetav $\left(1+\frac{a}{b}\right)^3>2^3=8$. Järelikult, kui a > b võrratus kehtib. Jääb tõestada, et võrratus kehtib kui a < b ja a = b.

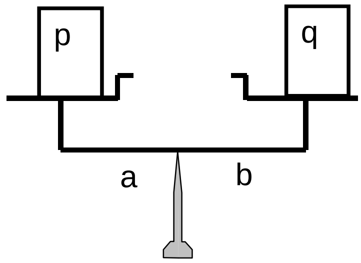
Kui a < b, siis teine liidetav $\left(1+\frac{b}{a}\right)^3>2^3=8$.

Kui a = b, siis $\left(1+\frac{a}{b}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}\right)^3=2^3+2^3=16>8$.

Järelikult võrratus kehtib kui a > b, b > a ja b = a ehk võrratus kehtib mistahes naturaalarvude korral.

**Näide 18.** Füüsikast teame, et kang on tasakaalus, kui kangile mõjuvad jõud on pöördvõrdelised jõudude õlgadega. Seega, kui kaalu mõlemad kaaluõlad on võrdsete pikkustega, on kaal tasakaalus parajasti siis, kui kummalgi kaalukausil on üheraskused esemed.
Kaupmehel tuli kaaluda 2 kg suhkrut kaaluga, mille kaaluõlad a ja b ei olnud võrdsete pikkustega. Kaupmees otsustas, et kaalub kaks korda. Esimesel korral paneb 1 kg vihi vasakule kaalukausile ja suhkru paremale, nii et kaal tasakaalus oleks ning teisel korral paneb 1 kg vihi paremale ja suhkru vasakule jällegi nii, et kaal oleks tasakaalus. Kaupmees arvas, et kui näiteks esimesel korral oli suhkrut natuke vähem kui kilo, siis teisel kaalumisel oli sama võrra rohkem, või siis vastupidi. Kas nii teostatud kahe kaalumisega sai kaupmees kaalutud täpselt kaks kilo suhkrut? Miks?

Lahendus: Kui kaal on tasakaalus, siis sõltumata sellest kas kaaluõlad on võrdsed või mitte kehtib võrdus ap = bq, kus a ja b on kaaluõlgade pikkused ning p ja q vastavad kogused kaalukaussidel. Ülesande tingimuste kohaselt $a \neq b$. Kaaluvihile 1 kg seati vastavusse esimesel kaalumisel x kg teisel y kg suhkrut. Seega $a \cdot 1 = bx$ ja $b \cdot 1 = ay$. Siit saame, et $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{a}$ ning kogu kaalutud suhkru kogus oli $x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ kg. Mistahes positiivse arvu $\frac{a}{b}$ (välja arvatud arv 1) ja tema pöördarvu $\frac{b}{a}$ summa on alati suurem kui 2. Kuna $a \neq b$, siis näite 12 põhjal teame, et kehtib range võrratus $a^2 + b^2 > 2ab$. Jagades võrratuse pooled arvuga ab (ab>0, st mõlemad arvud on positiivsed), saame $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$. Seega kaalus kaupmees tegelikult rohkem kui 2 kg suhkrut.



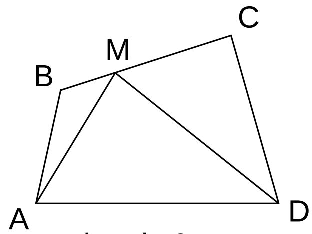
joonis 1.

## KOLMNURGA JA NELINURGA VÕRRATUSED

**Kolmnurga võrratus**: Kolmnurga iga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg ja iga kahe külje vahe on väiksem kui kolmas külg.

Lahenduskäigus tuleb tavaliselt välja kirjutada kolmnurga võrratus ühe või mitme kolmnurga jaoks. Seejärel arvestades, et külgede pikkused on positiivsed suurused võib sooritada nende võrratustega lubatud teisendusi (võrratuse omadused).

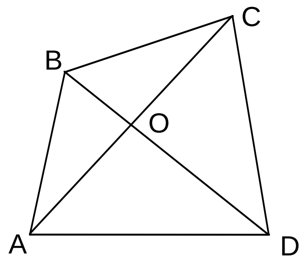
**Näide 19.** Tõesta, et P(ABCD) > P(AMD) (joonis 2.)



joonis 2.

Lahendus: Rakendades kolmnurga võrratust kolmnurkadele $\Delta ABM$ ja $\Delta DCM$, saame AB + BM > AM ja MC + CD > MD.
Liidame võrratused: AB + (BM + MC) + CD > AM + MD
ehk AB + BC + CD > AM + MD.
Liites võrratuse mõlemale poolele suuruse AD, saamegi nõutud võrduse.

**Näide 20**. Tõesta, et AC + BD > AB + CD. (joonis 3.)

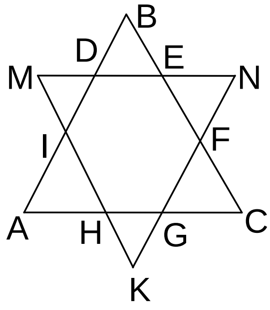


joonis 3.

Lahendus: Vaatleme kolmnurki $\Delta AOB$ ja $\Delta COD$, kus O on ABCD diagonaalide lõikepunkt.
Kolmnurga võrratusest järeldub, et
AO + BO > AB ja OC + OD > CD.
Liites need võrratused saame
(AO + OC) + (BO + OD) > AB + CD, ehk AC + BD > AB + CD, mida oligi vaja tõestada.

Näite 20 tulemust nimetatakse **nelinurga võrratuseks**: Kui nelinurga diagonaalid lõikuvad, siis tema diagonaalide pikkuste summa on suurem kui vastaskülgede pikkuste summa.

**Näide 21**. On teada, et kolmnurga $\Delta ABC$ ümbermõõt on 5cm, kolmnurga $\Delta MNK$ ümbermõõt 7 cm. Tõesta, et P(DEFGHI) < 6 cm. (joonis 4.)



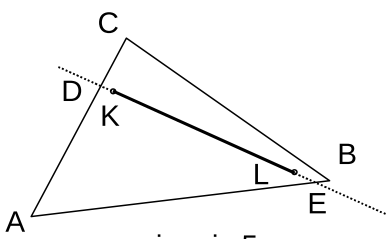
joonis 4.

Lahendus: Kirjutame välja kolmnurga võrratused.

$\Delta IAH$: AI + AH > IH; $\Delta IMD$: MI + MD > ID;
$\Delta DBE$: BD + BE > DE; $\Delta ENF$: NE + NF > EF;
$\Delta FCG$: CF + CG > GF; $\Delta GKH$: KG + KH > HG.

Liites need 6 võrratust, saame
P(MDBENFCGKHAI) > P(DEFGHI).
Liites võrratuse mõlemale poolele suuruse P(DEFGHI), saame P(ABC)+P(MNK) > 2P(DEFGHI) või 2P(DEFGHI) < 12cm.
Jagades viimase võrratuse mõlemad pooled arvuga 2, saamegi nõutud tulemuse.

**Näide 22**. Kolmnurga sees valiti kaks suvalist punkti. Tõestage, et nende kahe punkti vaheline kaugus on väiksem kui pool antud kolmnurga ümbermõõdust.



joonis 5.

Lahendus: Olgu valitud punktid K ja L. Pikendades lõiku KL lõikumiseni kolmnurga külgedega saame punktid D ja E. On selge, et DE > KL. Arvestades kasutusele võetud tähistusi (joonis 5.), saame
DC + BC + EB > DE ja AD + AE > DE. Liites need võrratused, saame AB + BC + AC = 2DE, millest $\frac{AB+BC+AC}{2} > DE > KL$.

**Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks**

**Ülesanne 1**. (2p) Kas järgnevad väitet kehtivad alati? Põhjenda lühidalt.

a) Kui a > b, siis $a^m > b^m$
b) Kui a > b ja c = d, siis ac > bd.

**Ülesanne 2**. (2p) Kas arv b on positiivne või negatiivne, kui a – b > 0; b – c < 0; a + c = 0? Põhjenda lühidalt.

**Ülesanne 3**. (5p) Millised ratsionaalarvudest a, b ja c on negatiivsed, kui on teada, et c < a ning kolmest arvust $(-3a^3b^3c^6)$, $(-2a^2b^5c)$ ja $(-4a^2b^2c)$ üks on positiivne ja kaks negatiivsed?

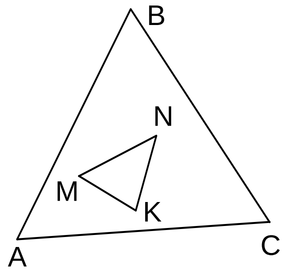
**Ülesanne 4**. (5p) Leia muutuja x väärtused, mis rahuldavad võrratust $\frac{x}{a} + x > 0$, kui on teada, et a < 0.

**Ülesanne 5**. (5p) Tõesta võrratus $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$

**Ülesanne 6**. (5p) Tõesta, et kui $a \geq 0$, $b \geq 0$ ja $c \geq 0$, siis $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

**Ülesanne 7.** (5p) Tõesta, et sama ümbermõõduga ristkülikutest on suurim pindala ruudul.

**Ülesanne 8.** (5p) Kasutades kolmnurga võrratust tõesta, et P(ABC) > P(MNK). (joonis 6.)



joonis 6.

**Ülesanne 9.** (5p) Tõesta, et kolmnurga kõrguste summa on alati väiksem selle kolmnurga ümbermõõdust.

**Ülesanne 10.** (5p) Tasandile on märgitud 10 punkti nii, et kõik punktide vahelised kaugused on erinevad. Iga punkt ühendatakse lõiguga talle lähimal asuva punktiga. Tõesta, et suvalised kaks tõmmatud lõiku ei lõiku.