TARTU ÜLIKOOL TEADUSKOOL

PÖÖRDKEHAD

Õppematerjal TÜ Teaduskooli õpilastele

Koostanud L. Tuulmets ja K. Koitmets

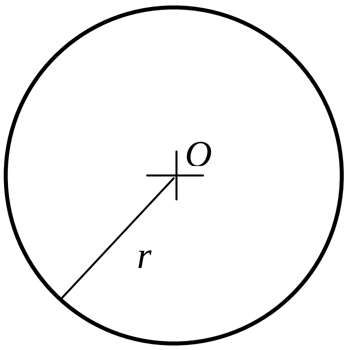
Saateks

Brošüür "Pöördkehad" on mõeldud TÜ Teaduskooli õpilastele ja on täiendmaterjaliks gümnaasiumi kursusele. "Pöördkehad" on varem ilmunud õppevahendi "Hulktahukad" järjeks.
Brošüüri teoreetiline osa koosneb kolmest peatükist.
Esimesele peatükile eelneb sissejuhatus, kus tuletatakse meelde mõningaid mõisteid ja valemeid ringjoone ja ringi kohta, mida on kasulik teada ülesannete lahendamisel.
Esimeses peatükis defineeritakse pöördpind ja pöördkeha. Lähemalt aga tutvustatakse silindrilist pinda ja silindrit. Tutvustatakse silindri eriliike ja esitatakse valemeid pindala ja ruumala arvutamiseks. Teises peatükis defineeritakse kooniline pind ja sellest lähtudes koonus. Antakse koonuse eriliigid ja valemid pindala ja ruumala arvutamiseks. Kolmandas peatükis defineeritakse sfäär ja kera, sfääri ja kera elemendid, antakse valemid pindalade ja ruumalade arvutamiseks.
Väljaande lõpus on täiendav peatükk, kus on esitatud lühidalt mõningad põhimõisted matemaatilisest analüüsist ja tutvustatud kruvijoont.

SISSEJUHATUS

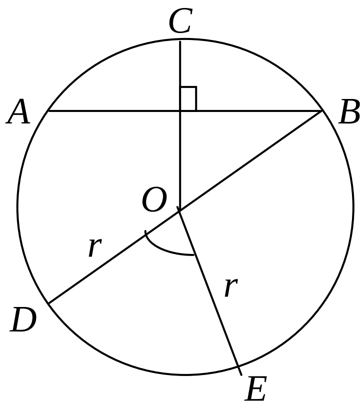
Enne kui asuda pöördkehade käsitlemisele, tuletame meelde mõningaid mõisteid ja valemeid ringjoone ja ringi kohta.

Ringjoon on tasandi punktide hulk, mis asuvad võrdsel kaugusel ühest kindlast sama tasandi punktist (joonis 1).



Joonis 1

r - ringjoone raadius
O - ringjoone keskpunkt



Joonis 2

Ringjoone mingit kaht punkti ühendavat lõiku nimetatakse ringjoone **kõõluks** (joonisel 2 näiteks *AB*). Ringjoone kõõl, mis läbib keskpunkti, on ringjoone **diameeter** (joonis 2 *BD*).

Ringjoone **kaareks** nimetatakse ringjoone osa tema kahe punkti vahel. **Kaarekraadiks** nimetatakse $\frac{1}{360}$ ringjoonest. Ringjoone kaare pikkus $l = \frac{\pi r n}{180}$, kus n on kaarekraadide arv kaares ja r ringjoone raadius ning π on ringjoone pikkuse ja diameetri suhe. Arvu π ligikaudne väärtus on 3,14.

Kesknurk on ringjoone kahe raadiuse vaheline nurk (joonisel 2 näiteks $\angle COB$). Kaarekraadide arv ringjoone kaares on võrdne nurgakraadide arvuga vastavas kesknurgas.

Kraad (1^0) on $\frac{1}{360}$ täispöördest, minut (1') on $\frac{1}{60}$ kraadist, sekund (1'') on $\frac{1}{60}$ minutist. Järelikult: $1^0 = 60'$, $1' = 60''$ ja $1^0 = 60' = 3600''$.

Ringjoone pikkus on $c = 2\pi r = \pi d$.

Ringjoone kaart ja kesknurka võib mõõta ka radiaanides.

Kaareradiaaniks nimetatakse raadiuse pikkust ringjoone kaart.

Radiaan ehk nurgaradiaan on kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele – kaareradiaanile. Radiaani tähistatakse sümboliga 1 *rad* või lihtsalt 1.

Kraadi ja radiaanmõõdu vaheline seos avaldub võrdusega

$$1\,rad = \frac{180^0}{\pi} \quad \text{ehk} \quad 1^0 = \frac{\pi}{180}\,rad\,.$$

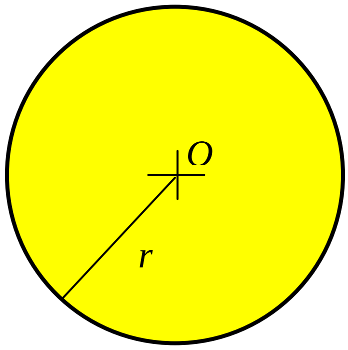
Kui l on kaarekraadide arv ja x on kaareradiaanide arv kaares, siis $l = r\,x$.

Ringiks raadiusega r nimetatakse tasandi punktide hulka, mille kaugus ühest sama tasandi kindlast punktist (ringjoone keskpunktist) on mitte suurem kui r (joonis 3).

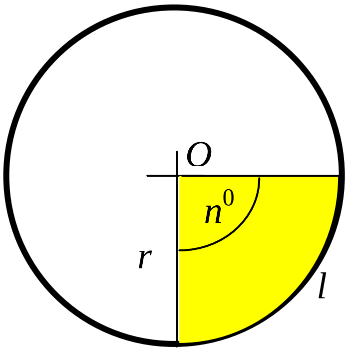
Ring on ringjoonega piiratud tasandi osa.

Ringi **sektoriks** (joonis 4) nimetatakse ringi osa, mida piiravad kaks raadiust ja nende otspunktide vahel asuv vastava ringjoone kaar *l*.

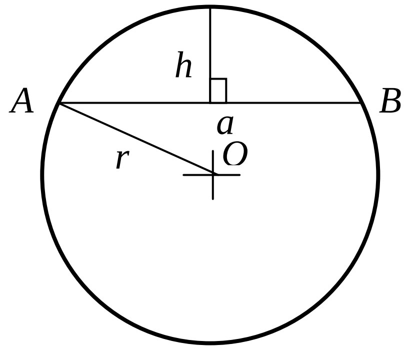
Sektori pindala $S = \dfrac{\pi r^2 n}{360} = \dfrac{l \cdot r}{2}$.



Joonis 3



Joonis 4



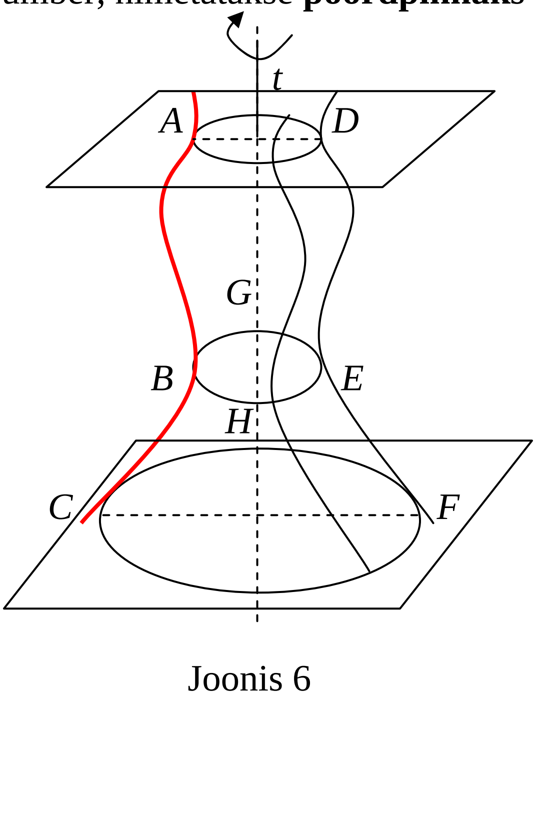
Joonis 5

Ringi **segmendiks** (joonis 5) nimetatakse ringi osa, mida piirab kõõl ja selle otspunkte ühendav kaar. Ligikaudne valem pindala arvutamiseks: $S \approx \dfrac{2}{3} a \cdot h$.

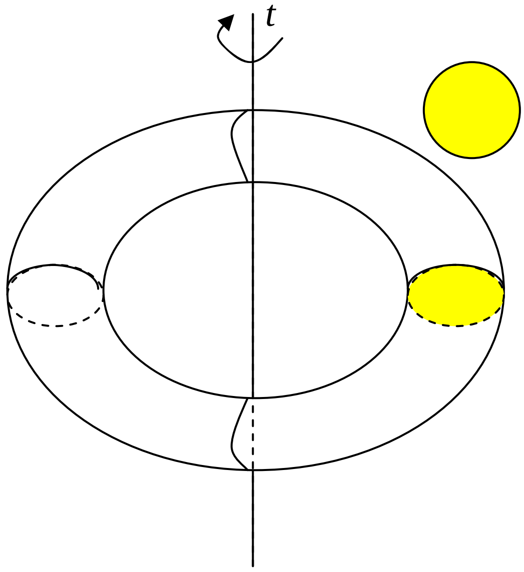
Ringi pindala: $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

I PEATÜKK
SILINDER
1. Pöördpind. Pöördkeha

Pinda, mis tekib joone (moodustaja) pöörlemisel mingi fikseeritud sirge nn telje ümber, nimetatakse **pöördpinnaks** (joonised 6 ja 7).



Joonis 6

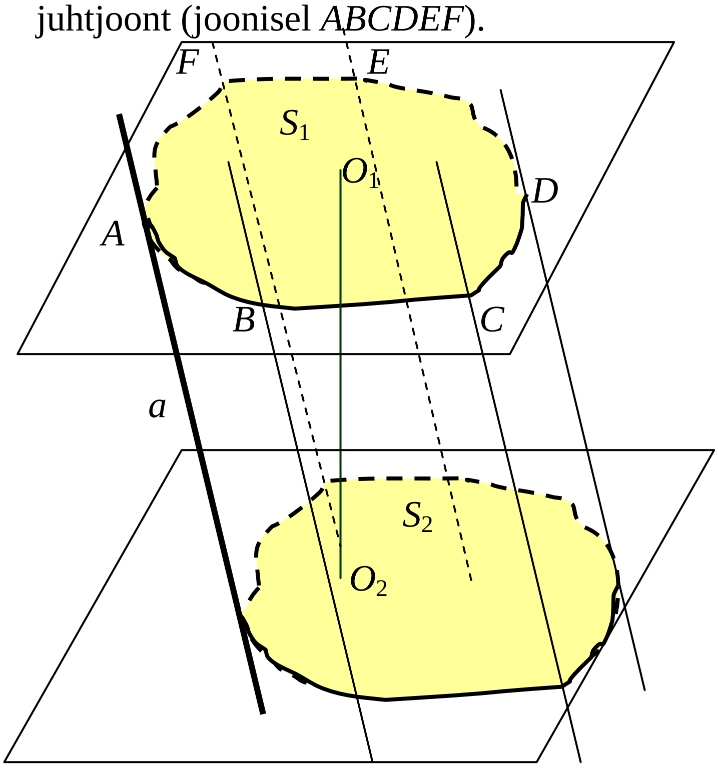


Joonis 7

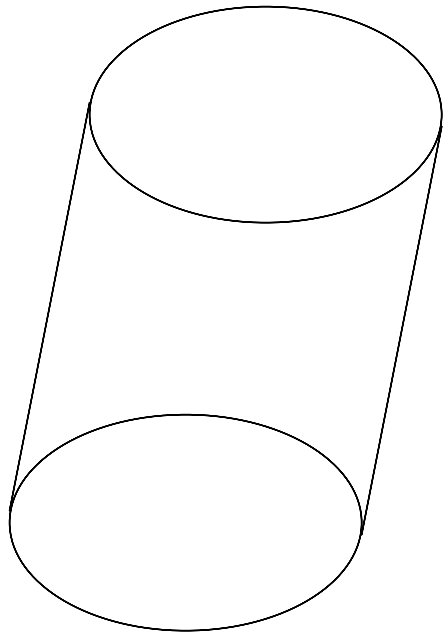
Lõikame pöördpinna moodustajaid kahe paralleelse tasandiga, mis on risti pöördpinna teljega.
Geomeetrilist kujundit (punkti hulk tasandil või ruumis), mida piiravad pöördpind ja need kaks paralleelset tasandit, nimetatakse **pöördkehaks**.
Pöördkeha lõiget tasandiga nimetatakse **telglõikeks**, kui tasand läbib keha telge (joonisel 6 *ABCFED*), ja **ristlõikeks**, kui tasand on risti teljega (joonisel 6 näiteks *BGEH*).

2. Silinder

Silindriliseks pinnaks nimetatakse pinda (joonis 8), mille kirjeldab sirge (moodustaja, joonisel *a*) liikumisel iseendaga paralleelselt mööda kinnist kõverat nn juhtjoont (joonisel *ABCDEF*).



Joonis 8



Joonis 9

Silindriks nimetatakse geomeetrilist kujundit, mida piiravad silindriline pind ja kaks tema moodustajaid lõikavat paralleelset tasandit (joonis 8). Kui tasandid lõikavad silindrilist pinda täisnurga all, tekib **püstsilinder**, vastasel juhul on tegemist **kaldsilindriga**.
Tasandite osi, mida lõikab ära silindriline pind teda lõikavatest paralleelsetest tasanditest (joonisel S_1 ja S_2) nimetatakse silindri **põhjadeks**. Silindrilise pinna osa, mis jääb põhjade vahele, nimetatakse silindri **külgpindalaks**. Silindri põhitasandite vahelist kaugust nimetatakse **kõrguseks** (joonisel 8 O_1O_2).
Kui silindri põhjaks on ring, siis nimetatakse silindrit **ringsilindriks** (joonis 9).

Üldjuhul silinder ei ole pöördkeha. Silinder on pöördkeha, kui ta on püstringsilinder. Püstringsilinder tekib ristküliku pöörlemisel ümber ühe oma külje, seetõttu nimetatakse püstringsilindrit ka **pöördsilindriks**.

Olgu silindri kõrgus h, silindri külgpindala S_k , silindri põhja pindala S_p , pöördsilindri põhja raadius r.

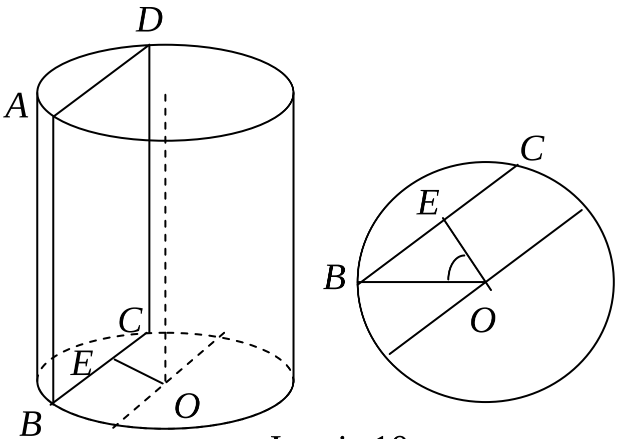
Silindri täispindala on siis $S_t = S_k + 2S_p$ ja silindri ruumala $V = S_p \cdot h$.

Pöördsilindri täispindala $S_t = 2\pi r(r + h)$. (1)

Pöördsilindri külgpindala $S_k = 2\pi rh$.

Pöördsilindri ruumala $V = \pi r^2 h$. (2)

<u>Näide 1.</u> Pöördsilindrit lõikab tasand, mis on paralleelne silindri teljega, asub sellest 2 dm kaugusel ja eraldab silindri põhja piiravast ringjoonest kaare 120^0. Leida lõike pindala, kui silindri kõrgus on 10 dm.



Joonis 10

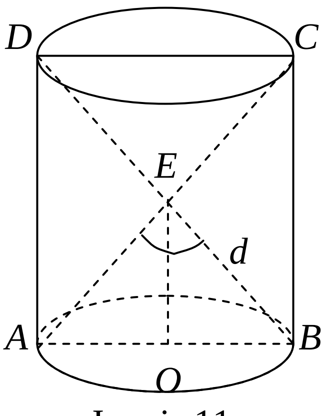
Lahendus. Lõike $ABCD$ pindala on arvutatav $S = AB \cdot CD$, kus teksti põhjal $CD = 10$.

Teeme eraldi joonise põhjast. Kolmnurgast EOB saame, et $\angle EOB = 60^0$, seega on leitav ka meid huvitav lõik $EB = EO \cdot \tan 60^0 = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Et $BC = 2\ EB = 4\sqrt{3}$ ja $AB = BC$, siis lõike pindala $S = 10 \cdot 4\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$.

Vastus: lõike pindala on $40\sqrt{3}$ dm^2.

<u>Näide 2.</u> Pöördsilindri telglõike diagonaalide vaheline nurk on 60^0. Leida silindri täispindala ja ruumala, kui diagonaal on d.



Joonis 11

Lahendus. Pöördsilindri täispindala ja ruumala arvutatakse vastavalt valemitele (1) ja (2).

Selleks tuleb leida silindri põhja raadius (joonisel 11 AO) ja silindri kõrgus (joonisel 11 BC).

Vaatame kolmnurka ABE. Kuna $\angle AEB = 60^0$, siis ka $\angle EAB = \angle EBA = 60^0$, sest telglõike diagonaalid moodustavad põhjaga ühe ja sama nurga ning kolmnurk ABE on võrdkülgne. Lisaks sellele on telglõige ristkülik. Ristküliku diagonaalid poolitavad teineteist, seega põhja raadius $AO = \frac{d}{4}$.

Pöördsilindri kõrguse CB leiame kolmnurgast ABC:

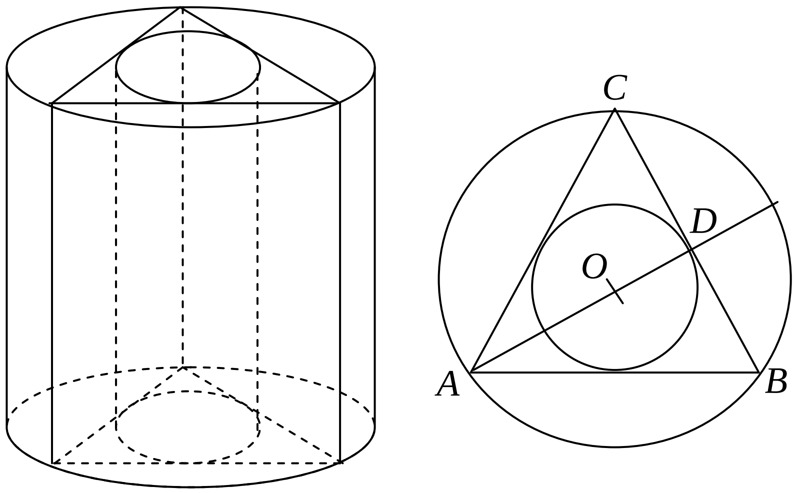
$$CB = d \cdot \sin 60^0 = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} d .$$

Nüüd täispindala $S_t = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot \frac{d}{4}(\frac{d}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} d) = (\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4})\pi d^2$

ja ruumala $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (\frac{d}{4})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d = \frac{\sqrt{3}}{32} \pi d^3$.

Vastus: pöördsilindri täispindala on $(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4})\pi d^2$ **ja ruumala** $\frac{\sqrt{3}}{32}\pi d^3$.

<u>Näide 3.</u> Pöördsilindrisse on ehitatud korrapärane kolmnurkne prisma ja viimasesse omakorda pöördsilinder. Leida nimetatud silindrite ruumalade suhe.



a) b)

Joonis 12

Lahendus: (vt joonist 12). Olgu esimese (suurema) pöördsilindri ruumala $V_1 = \pi r_1^2 h$ ja teise pöördsilindri ruumala $V_2 = \pi r_2^2 h$, kus r_1 on esimese ja r_2 teise silindri põhja raadius ning h on silindrite kõrgus.
Ruumalade suhe $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

Võrdkülgses kolmnurgas siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid ühtivad (joonis 12 b)), seega $AO = r_1 = \frac{2}{3}AD$ ja $OD = r_2 = \frac{1}{3}AD$, siit $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2AD \cdot 3}{3 \cdot AD} = 2$.

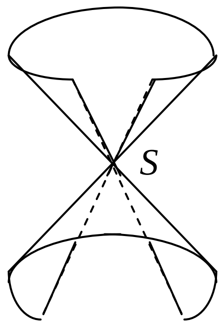
Järelikult $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 4$.

Vastus: pöördsilindrite ruumalade suhe on 4 : 1.

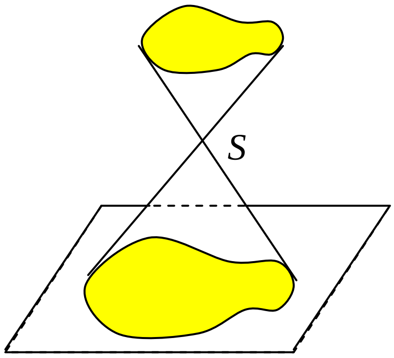
II PEATÜKK

KOONUS. TÜVIKOONUS

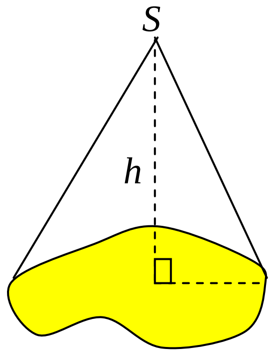
Olgu antud mingi joon ja fikseeritud punkt. Seda punkti (tippu) ja joone (juhtjoone) kõiki punkte ühendavatest sirgetest (moodustajatest) koosnevat pinda nimetatakse **kooniliseks pinnaks** (joonised 13 ja 14).



mittetäielik kooniline pind
Joonis 13



täielik kooniline pind
Joonis 14



koonus
Joonis 15

Koonilist pinda nimetatakse **mittetäielikuks** kooniliseks pinnaks, kui juhtjoon on lahtine (joonis 13) ja **täielikuks** kooniliseks pinnaks, kui ta juhtjoon on kinnine (joonis 14). Tipp S jaotab koonilise pinna kaheks katteks.
Geomeetrilist kujundit, mida piiravad täieliku koonilise pinna üks kate (koonuse külgpind) ja koonuse kõiki moodustajaid lõikav tasand (põhitasand) nimetatakse **koonuseks** (joonis 15). Katte sees olev põhitasandi osa on koonuse **põhi**, koonilise pinna tipp on koonuse **tipp**. Tipu kaugust põhitasandist nimetatakse koonuse **kõrguseks**. Koonuse tipust koonuse põhjale langetatud ristlõiku nimetatakse koonuse **kõrguslõiguks**. Kui koonuse põhjaks on ring, siis nimetatakse koonust **ringkoonuseks**.

Nii nagu silindergi ei ole ka koonus üldjuhul pöördkeha. Kui ringkoonuse kõrguse aluspunkt ühtib põhja keskpunktiga, nimetatakse koonust **püstringkoonuseks**. Püstringkoonus on pöördkeha. Ta tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber oma kaateti (see on ka koonuse teljeks), mistõttu nimetatakse püstringkoonust ka **pöördkoonuseks**.

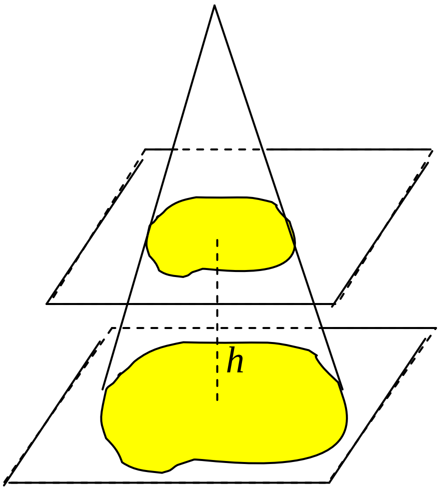
Olgu koonuse pindala S_p, külgpindala S_k , põhja raadius r, pöördkoonuse moodustaja m ja pöördkoonuse kõrgus h.

Koonuse täispindala $S_t = S_p + S_k$ ja koonuse ruumala $V = \frac{1}{3} S_p \cdot h$.

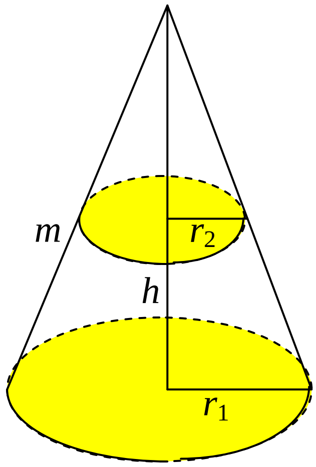
Pöördkoonuse külgpindala $S_k = \pi r m$.
Pöördkoonuse täispindala $S_t = \pi r (r + m)$.

Pöördkoonuse ruumala $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$.

Koonuse põhjaga paralleelne lõige jaotab koonuse kaheks osaks. Koonuse osa, mis jääb lõike ja põhja vahele, nimetatakse **tüvikoonuseks** (joonis 16).



Joonis 16



Joonis 17

Tüvikoonusel on kaks põhja. Põhitasandite vahelist kaugust nimetatakse **kõrguseks**. Üldjuhul tüvikoonus ei ole pöördkeha. Tüvikoonus on pöördkeha siis, kui ta tekib pöördkoonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasandiga (joonis 17). Sel juhul nimetatakse tüvikoonust **pöördtüvikoonuseks**. Pöördtüvikoonus tekib täisnurkse trapetsi pöörlemisel ümber oma lühema haara.

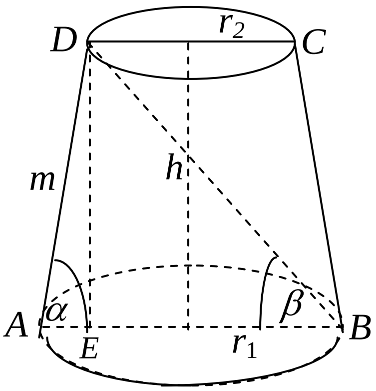
Olgu r_1 tüvikoonuse alumise põhja raadius, r_2 tüvikoonuse ülemise põhja raadius, m tüvikoonuse moodustaja ja h tüvikoonuse kõrgus.

Pöördtüvikoonuse külgpindala $S_k = \pi m(r_1 + r_2)$. (3)

Pöördtüvikoonuse täispindala $S_t = \pi(r_1^2 + r_2^2 + m(r_1 + r_2))$.

Pöördtüvikoonuse ruumala $V = \dfrac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

__**Näide.**__ Pöördtüvikoonuse moodustaja m ja suurema põhja vaheline nurk on α. Telglõike diagonaal moodustab sama põhjaga nurga β. Leida pöördtüvikoonuse külgpindala.



Joonis 18

Lahendus.

Pöördtüvikoonuse külgpindala arvutamiseks kasutame valemit (3). Olgu pöördtüvikoonuse alumise põhja raadius r_1, ülemise põhja raadius r_2 ja kõrgus h (joonis 18). Lõik EB ehk pöördtüvikoonuse põhjade raadiuste summa $r_1 + r_2 = EB = \dfrac{h}{\tan\beta}$.

Kõrguse saame leida kolmnurgast AED, nimelt $h = m \cdot \sin\alpha$.

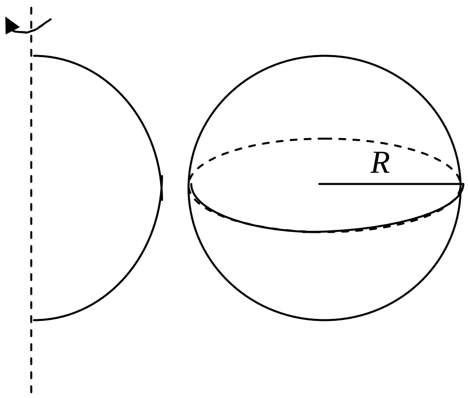
Nüüd $S_k = \pi m(r_1 + r_2) = \pi m \cdot \dfrac{m\sin\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{\pi m^2 \cdot \sin\alpha}{\tan\beta}$.

Vastus: pöördtüvikoonuse külgpindala on $S_k = \dfrac{\pi m^2 \cdot \sin\alpha}{\tan\beta}$.

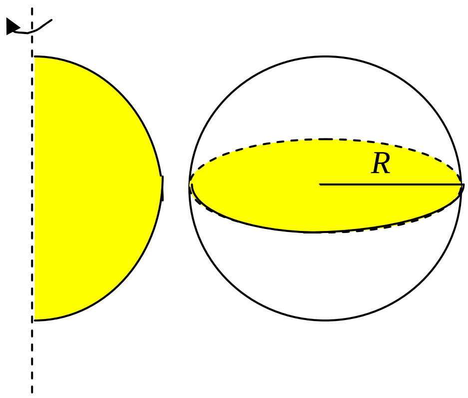
III PEATÜKK

SFÄÄR. KERA

Sfääriks nimetatakse pinda ruumis, mille kõik punktid on võrdsel kaugusel R ühest kindlast punktist, mida nimetatakse sfääri keskpunktiks. Suurust R nimetatakse sfääri raadiuseks. Sfääri saame ka siis, kui laseme poolringjoonel (või ringjoonel) pöörelda ümber oma diameetri (joonis 21). Seetõttu on sfäär pöördpind.



Joonis 21



Joonis 22

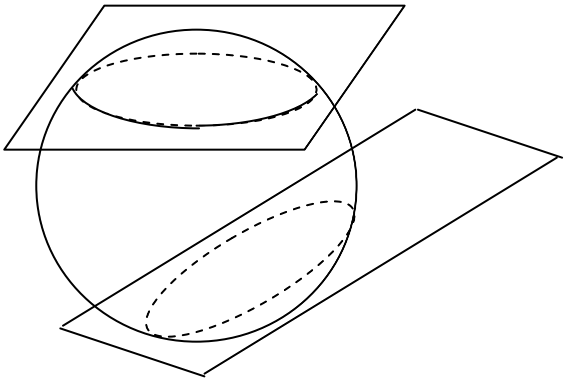
Keraks nimetatakse kujundit ruumis, mille kõikide punktide kaugused ühest kindlast punktist (kera keskpunktist) on mitte suuremad kui etteantud arv R (kera raadius).

Kera saame ka siis, kui laseme poolringil (või ringil) pöörelda ümber oma diameetri (joonis 22). Järelikult kera on pöördkeha. Kera pind on aga sfäär. Sfääri kahte punkti ühendavat sirglõiku, mis läbib kera keskpunkti, nimetatakse **sfääri diameetriks** ja ühtlasi ka **kera diameetriks**.

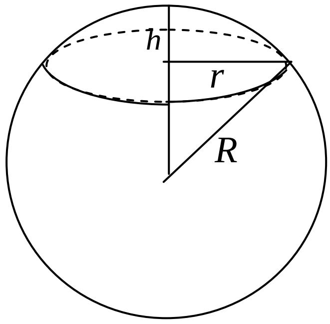
Kera iga lõige tasandiga on ring (joonis 23). Kui lõiketasand läbib kera keskpunkti, siis lõikeringi raadiuseks on kera raadius ning lõiget nimetatakse kera **suurringiks**, vastavat lõikejoont aga kera suurringjooneks (ka sfääri suurringjooneks).

Sfääri (kera) pindala S võrdub suurringi neljakordse pindalaga ning kera ruumala V on $\frac{1}{3}$ kera pindala ja raadiuse korrutisest. Seega tähistades R kera raadiust ja d kera diameetrit, on kera pindala ja ruumala arvutatavad vastavalt valemitele:

$S = 4\pi R^2 = \pi d^2$ ja $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$.



Joonis 23



Joonis 24

kera tasandiga, jaotub kera kaheks osaks (joonis 24). Neid osi nimetatakse **kera segmentideks**. Kui lõiketasand läbib kera keskpunkti, on segmentideks poolkerad.
Kera segmenti piiravat sfääri osa nimetatakse **sfääri** segmendiks. Kera segmenti piiravad seega ring, mida nimetatakse segmendi **põhjaks** ja sfääri segment. Segmendi põhja keskpunktist kera pinnani tõmmatud põhjaga ristuvat lõiku nimetatakse **segmendi kõrguseks** (joonisel 24 lõik *h*) ja segmendi põhja raadiust **segmendi raadiuseks** (joonisel 24 lõik *r*).

Olgu kera segmendi raadius *r*, kera segmendi kõrgus *h* ja kera raadius *R*.
Segmendi raadiuse, kõrguse ja vastava kera raadiuse vahel kehtib seos:

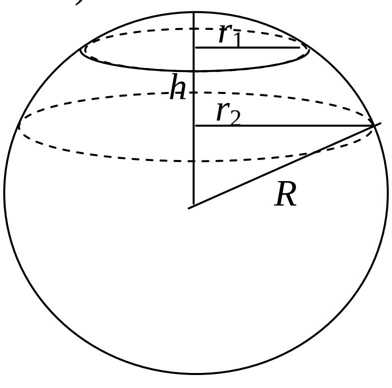
$$r^2 + h^2 = 2Rh.$$

Sfääri segmendi pindala $S_k = 2\pi Rh = \pi(h^2 + r^2)$.

Kera segmendi pindala $S = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2)$.

Kera segmendi ruumala $V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$. (4)

Kera kihiks nimetatakse kera osa, mis jääb kahe paralleelse lõiketasandi vahele (joonis 25).



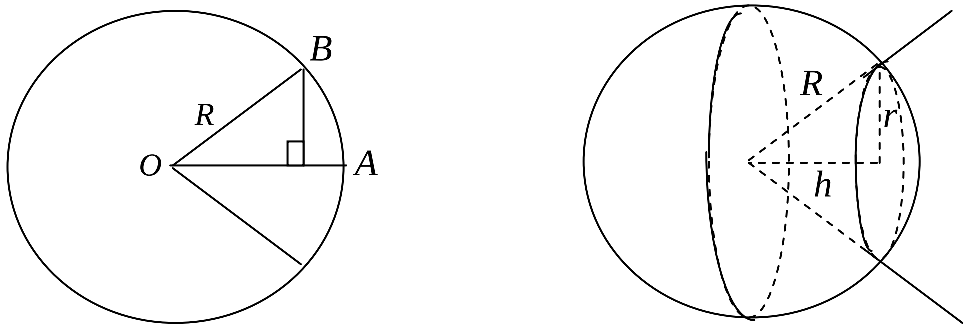
Joonis 25

Kera kihti piiravad 2 paralleelset ringi, mida nimetatakse kihi **põhjadeks** ja sfääri osa, mida nimetatakse kera **vööks** (joonis 25). Kera kihi põhjadevahelist kaugust nimetatakse kihi kõrguseks (ka vöö kõrguseks).
Olgu r_1 ja r_2 kihi põhjade raadiused, *h* kihi kõrgus ja *R* kera raadius.

Kera vöö pindala $S = 2\pi Rh$.

Kihi pindala $S = \pi(r_1^2 + 2Rh + r_2^2)$.

Kihi ruumala $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$. (5)

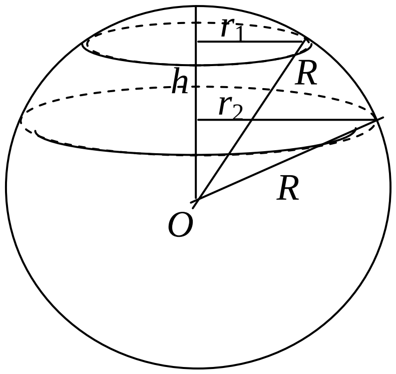


Joonis 26

Kera **sektor** on pöördkeha (joonis 26). Ta tekib ringi sektori pöörlemisel ümber sektori nurgapoolitaja (joonisel 26 lõik *OA*).
Kera sektori pindala $S = \pi R(2h + r)$.

Kera sektori ruumala $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

<u>Näide 1.</u> Kera, mille raadius on 65 cm, on ühel pool keskpunkti lõigatud kahe paralleelse tasandiga, mille kaugused kera keskpunktist on 16 cm ja 25 cm. Arvutada tasandite vahele jääva osa ruumala.



Joonis 27

Lahendus.
Kera kihi ruumala arvutamiseks kasutame valemit (5). Kihi põhjade raadiused r_1 ja r_2 (joonis 27) leiame Pythagorase teoreemi abil.

$r_2^2 = 65^2 - 16^2$, kust $r_1 = 63$

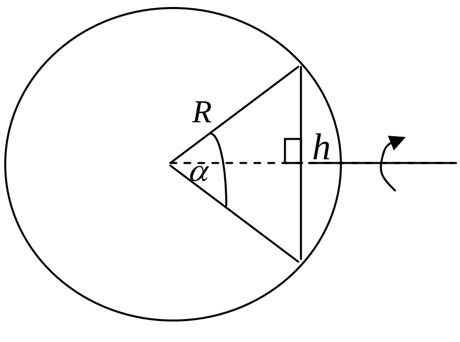
$r_1^2 = 65^2 - 25^2$, kust $r_2 = 60$

Kihi kõrgus $h = 25 - 16 = 9$ ja ruumala

$V = \frac{1}{6}\pi(3 \cdot 3969 + 3 \cdot 3600 + 81) \cdot 9 = 34182\pi$ cm^3.

Vastus: tasandite vahele jääva osa ruumala on 34182 π cm^3.

<u>Näide 2.</u> Ringi segment, mille kaar on $\alpha = 120^0$, pöörleb ümber oma nurgapoolitaja. Leida tekkiva pöördkeha ruumala, kui ringi läbimõõt on *d*.



Joonis 28

Lahendus (vt joonist 28).
Tekkinud pöördkehaks on kera segment. Kera segmendi ruumala arvutamiseks kasutame valemit (4). Segmendi kõrgus

$h = R - R\cos\frac{\alpha}{2} = R - R\cos 60^0 = \frac{1}{2}R$.

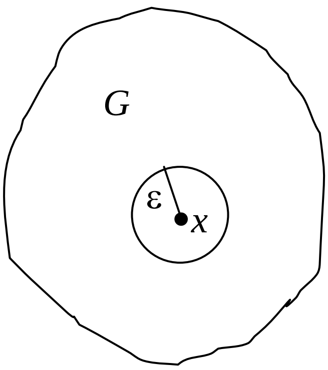
Nüüd $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}R^2(3R - \frac{1}{2}R) = \frac{5}{24}\pi R^3$.

Vastus: tekkinud pöördkeha ruumala on $\frac{5}{24}\pi R^3$.

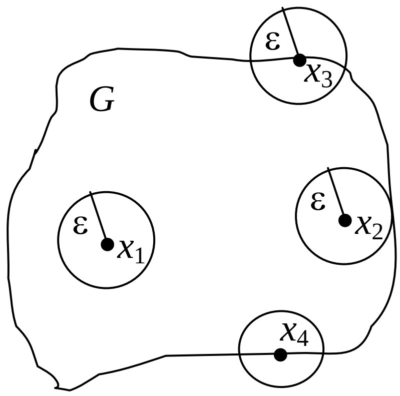
LISA
Matemaatilisest analüüsist geomeetriasse

Geomeetrilise kujundi (geomeetrilise keha) niisuguseks defineerimiseks, mis vastaks kaasaja nõuetele, kasutame matemaatilisest analüüsist pärinevaid mõisteid. Esitame need siin lühidalt.

Olgu G mingi kujund (punktihulk) tasandil. Kujundi G punkti x **ümbruseks** nimetatakse ringi keskpunktiga x ja raadiusega $\varepsilon > 0$. Arv ε võib olla kuitahes väike (joonis 29). Kujundi G punkti x nimetatakse sisepunktiks, kui selle punkti mistahes väike ümbrus kuulub kujundile G, st eksisteerib arv $\varepsilon > 0$ nii, et kõik punktid, mille kaugus punktist x on väiksem kui ε, kuuluvad kujundile G (joonisel 30 punktid x_1 ja x_2).



Joonis 29

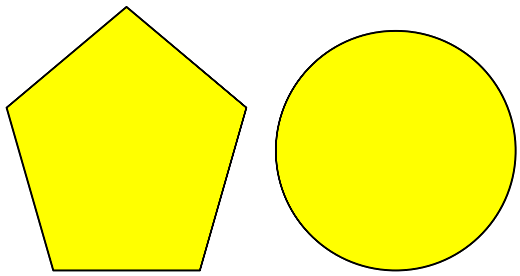


Joonis 30

Kujundi G punkti x nimetatakse **raja-punktiks**, kui selle punkti igas ümbruses, ükskõik millise ε korral, leidub nii vaadeldavasse hulka kuuluvaid kui ka sinna mittekuuluvaid punkte (joonisel 30 punktid x_3 ja x_4).

Hulka (punktihulka), mille iga punkt on selle hulga sisepunkt, nimetatakse **lahtiseks hulgaks** ehk **lahtiseks piirkonnaks** (joonisel 31, hulknurk ilma hulkkülikuta – lahtine hulknurk; ring ilma ringjooneta – lahtine ring).

lahtised piirkonnad
Joonis 31



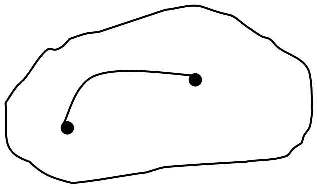
kinnised piirkonnad
Joonis 32

Kõik rajapunktid moodustavad piirkonna **raja**. Näiteks hulknurga raja on hulkkülik, ringi raja on ringjoon.

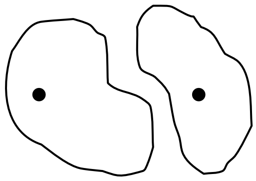
Kui lisame lahtisele piirkonnale G tema rajapunktid, siis saame **kinnise piirkonna**.

Hulknurk ja ring on kinnised piirkonnad (joonis 32).

Kujundit G nimetatakse **sidusaks piirkonnaks**, kui iga tema kahte punkti saab ühendada sellesse piirkonda kuuluva joonega. Joonisel 33 on näidatud sidus piirkond, joonisel 34 aga mittesidus.



Joonis 33



Joonis 34

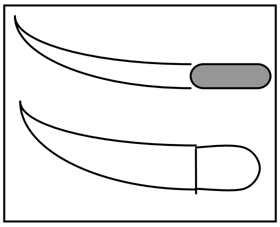
Nagu tasandil (kahemõõtmelises ruumis) nii ka ruumis (vaatleme vaid kolmemõõtmelist ruumi) saab defineerida kujundi punkti ümbruse, sisepunkti, piirkonna, raja jne. Definitsioone enam kordama ei hakka, need on analoogilised. Ütleme ainult niipalju, et punkti ümbrus ruumis ei ole enam lahtine ring, vaid kera.

Kinnist sidusat piirkonda ruumis nimetatakse kehaks (eespool mõistsime parema kujundlikkuse saavutamiseks keha all geomeetrilist kujundit).

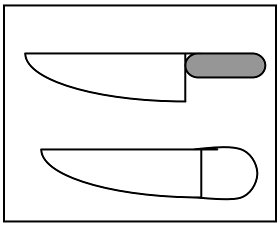
Nüüd võib defineerida hulktahuka, pöördkeha jne.

Nagu näete võib küllalt keerulist, kuid seejuures matemaatiliselt põhjendatud teed mööda jõuda geomeetriliste kujunditeni, mida on eespool käsitletud.

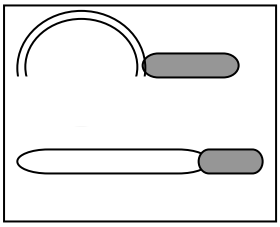
Asendamatu kõver



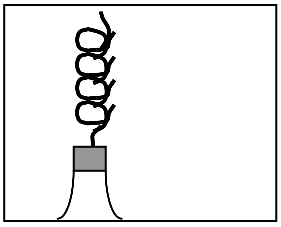
Pilt 1



Pilt 2



Pilt 3



Pilt 4

Vaadake tähelepanelikult pilti 1, mis on tehtud valesti?

Pöörake tähelepanu *noale*, seda ei ole kuidagi võimalik panna sama kujuga tuppe.

Pildil 2 on aga nuga, mida on võimalik panna sama kujuga tuppe (kui nad otsast ei paksene). Kas oskate veel mõelda välja mõne põhimõtteliselt erineva kujuga sellist tüüpi noa, mis mahuks samasuguse kujuga tuppe?

Kas teil tuli pähe mõte minna kõveratest tasandil üle kõveratele ruumis? Tasandil selliseid nuge rohkem ei leidu. Osutub, et peale seni sobilikuks osutunud kahe noa, leidub veel vaid üks *nuga*, mida saab panna temaga ühtmoodi tuppe. Sellise kujuga *noaks* on **kruvijoone** kujuline *nuga* ehk korgitser.

Kruvijoonel on suur tähtsus kaasaegses teaduses, eriti bioloogias ja füüsikas. Erinevalt oma õdedest tasandil – sirgest ja ringjoonest – on kruvijoonel eriline omadus: ta võib olla parempoolne või vasakpoolne. Sirget ja ringjoont on võimatu eristada oma peegelpildist. Ei valmista aga mingit raskust eristada oma peegelpildist kruvijoont. Peeglis jookseb kruvijoon justkui tagurpidi.

Looduses ja igapäevases elus võib leida palju näiteid kruvijoonest. Kruvijoont loetakse traditsiooniliselt parempoolseks kui teda saab keerata enda poolt vaadates kellaosuti liikumise suunas. Kruvid, poldid, mutrid on reeglina parempoolsed. Keerdtrepid, vedrud, köie, kaabli ja pillikeele kiud võivad olla nii parem- kui vasakpoolsed.

Looduses on kruvijoone kujulised näiteks mitmete loomade sarved, teokarbid jne. Orav, ronides mööda puutüve üles või alla, liigub mööda kruvijoont (silindrilist kruvijoont). Kooniliste kruvijoonte näiteks on niisugused loodusnähtused nagu tuisk, vesipüks jne. Need on vaid mõned näited. Lähemaks tutvumiseks kruvijoonega võib lugeda M. Gardneri raamatut "See parem ja vasak maailm".

Korrapäraseks silindriliseks kruvijooneks nimetatakse silindrilist kruvijoont, mis lõikab kõiki silindri moodustajaid konstantse nurga all. Olgu see nurk φ. Kui $\varphi = 0$, siis kruvijoon on sirge ja kui $\varphi = 90^0$, siis kruvijoon on ringjoon. Seega sirge ja ringjoon on kruvijoone erijuhud.

Kruvijoonel on iseloomulik omadus: ta kõverus igas punktis on sama, st ta on nn konstantse kõverusega. Kruvijoon on ainus konstantse kõverusega kõver ruumis. Tasandil on ainsateks konstantse kõverusega joonteks sirge ja ringjoon.

Sellega võibki seletada, miks *nuge* , mida on võimalik panna sama kujuga tuppe, saab ruumis teha ainult korrapärase kruvijoone kujulisi ja tasandil ainult sirge ja ringjoone kujulisi.

Kruvijoonega seoses pakume ühe lihtsa lahendusega huvitava ülesande – jutustuse.

Silindrilise torni sees töötab lift. Torni kõrgus on 100 m. Väljaspool torni on keerdtrepp, mis moodustab vertikaaliga nurga 60^0. Torni läbimõõt on 13 m.

Ema, isa ja poeg tahtsid minna torni vaateplatsile. Ema ja isa otsustasid tõusta üles liftiga, poeg aga eelistas minna jalgsi. Jõudes üles, nägi ta välja väga reibas.

"Kindlasti oled sa väsinud, poeg", märkis isa, "sest sul tuli läbida neli korda pikem tee kui meil ja veel jalgsi".

"Sa eksid", vastas poeg. "Ma käisin vaid kaks korda pikema maa kui teie sõitsite".

Kellel oli õigus: kas isal või pojal?

Osutub, et keerdtrepi võib alati lahti keerata täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiks, kusjuures kolmnurga teravnurk on antud juhul 30^0 ja selle vastaskaatet (torni kõrgus) on 100 m. Sel juhul on kolmnurga hüpotenuus kaks korda pikem kaatetist. Järelikult oli õigus pojal.