TARTU ÜLIKOOL

TEADUSKOOL

ETTEVALMISTUS KEEMIAOLÜMPIAADIKS

TEHTED LIGIKAUDSETE ARVUDEGA

Rein Pullerits

Õppevahend TK õpilastele

Tartu 2007

Tehted ligikaudsete arvudega

Täpne ja ligikaudne arv

Noor loodusvaatleja hindas üle lahe lendavate lindude koguarvu. Päeva jooksul nägi ta 3 luike, 24 toonekurge, 3 haneparve, milles igaühes võis olla 500 lindu.

Sõbrale saadetud aruandes teatas ta, et nägi vaatluspäeval 1527 isendit.

Oma aruandes loodusvaatleja liialdab täpsusega, sest arvutusel saadud tulemus ei saa kunagi olla täpsem loendamise (mõõtmise) täpsusest. Ühekordse loendamisega võime eksida.

- Vaevalt et loodusvaatleja luikede arvuga eksis, neid oli kolm.
- Kurgede arvus võis ta eksida mõne linnuga. Seega kurgede arvus on kümnelisi väljendav arv (kaks) täpne, kuid ühelisi väljendavas arvus (neli) me kahtleme. See arv on ligikaudne.
- Hanede arvu hindamisel (viissada) me kahtleme juba sajalisi väljendavas arvus (kui hanede arvu hinnati saja linnu täpsusega, siis võis neid olla parves nii nelisada kui ka kuussada).

Täpseid arve saame loendamisel, kui meil on piisavalt aega (ja võimalust) veelkordseks ülelugemiseks.

Sageli kasutame arve, mis on saadud mõõtmise teel. Mõõtmise tulemus, mis on mõõtühikute loendamine, jääb alati ebatäpseks, sest arvväärtuse täpsus sõltub mõõtevahendi täpsusest.

Põllumees kasutas maa mõõtmiseks kolmnurksirklit, mille harudevaheline pikkus 153 cm oli määratud 1 cm täpsusega. Seega mõõtevahendi täpsus on 153(±1) cm. Nii sajalisi kui ka kümnelisi väljendavad arvud on täpsed. Ühelisi väljendav arv on ligikaudne, sest ühelisi väljendav number võib olla nii 2 kui ka 4.

Sirkli harude vahet võime väljendada ka kilomeetrites. Arvus 0,00153(±0,00001) km on tuhandikke ja kümnetuhandikke väljendavad arvud täpsed, kuid sajatuhandikke väljendav arv on ligikaudne, sest number kolme asemel võib olla nii kaks kui neli.

Selle pikkuse väljendamine mikromeetrites annaks meile 1530000(±10000) μm, kus miljonilisi ja sajatuhandelisi väljendavad arvud on täpsed, kuid kümnetuhandelisi väljendav arv on ligikaudne. Kõikidel vaadeldud juhtudel on kolmest (nullist erinevast) numbrist kahe esimese numbriga väljendatud arvud täpsed ja kolmanda numbriga väljendatud arvu täpsuses me kahtleme, see on ligikaudne.

Kõik mõõtmistel saadud arvud on **ligikaudsed**, erinedes täpsetest teatava vea võrra. Ligikaudseid arve võib ümardada, asendades arvu lõpust iga nullist erineva numbri nulliga.

Ligikaudse arvu koosseisu kuuluv number on õige, kui viga ei ületa selle numbriga tähistatud järgule eelnevat järku poole võrra (+/- 0.5)

Sel juhul viga ei märgita.

Näiteks: 237±0,5=237;   2,37±0,005=2,37

Kõik arvu õiged numbrid moodustavad arvu tüve ja need on **tüvenumbrid.** Tüvenumbrite arv ei muutu, kui arvu korrutada või jagada mingi kümne astmega (nihutada koma ükskõik kummas suunas).

Tüvenumbriteks on

a) täisarvu korral kõik numbrid, v.a. viimased nullid:

1, 10**, 105, 105**0

Täisarvu lõpunullid näitavad arvu suurusjärku ja pole seetõttu tüvenumbriteks.

b) kümnendmurru korral kõik numbrid pärast koma:

1,05;   0,**1050;**   0,0**10**

c) *standardkujulise arvu korral kõik numbrid, mis on suurusjärgu (10^x) kordajaks:

1,6 $\cdot 10^2$;   **1,008** $\cdot 10^{-3}$;   **1,100** $\cdot 10^4$

*Standardkujul kirjutatud arv on arvu tüve ja sobiva kümne astme korrutis. Arvu tüves kirjutatakse koma nii, et moodustuv arv oleks ühe ja kümne vahel (1 - 10). Kümne aste näitab tüvenumbrite suurusjärku:

$1,6 \cdot 10^2$ = **16**0; $1,008 \cdot 10^{-3}$ = 0,00**1008**; $1,1055 \cdot 10^4$ = **11055**

Mingi arvu tüvenumbrite määratlemiseks võib:

- kujutada arv standardkujul,
- tähistada täisarvu lõpus tüvenumbriks olev 0 kriipsuga,
- märkida vea suurus.

Arvu 217000 täpsust väljendavad kirjutusviisid:

$2,17000 \cdot 10^5$

$21700\underline{0}$

217000(±0,5)

Märkus. Kaasaegsetes teatmikes kirjutatakse ligikaudse arvu viga arvu lõppu sulgudesse.

Näiteks 153±1 kirjutatakse kujul 153(1), kuigi matemaatikas väljendab sulgudesse kirjutatud number selle perioodilist kordumist. 153000±1000 kirjutatakse kujul $1,53(1) \cdot 10^5$.

Kui ligikaudse arvu viga on antud, siis on selle arvu kõik numbrid tüvenumbriteks, sõltumata sellest, milline on selle vea suurus.

Näiteks arvus 217003±9, mida võib anda ka kujul 217003(9), on kuus tüvenumbrit ja seda arvu pole õige ümardada arvuks 217004, sest sellisel juhul me suurendame lõppvastuse ebatäpsust.

Arvus 217035±17 $\Leftrightarrow$ 217035(17) on kuus tüvenumbrit. Lähteandmete viga võetakse arvesse lõppvastuse vea arvutamisel.

Näide 1. On antud järgmised arvud.

a) 5432 c) 0,135 e) 0,0095 g) 3,070

b) 5020 d) 9000 f) 8,000 h) 0,0100

A. Kirjutada, milline täpsus on antud arvudel, kui viimane tüvenumber erineks kirjutatust ±4 võrra.

Vastused

a) 5432(±4)	e) 0,0095(±0,0004)
b) 5020(±40)	f) 8,000(±0,004)
c) 0,135(±0,004)	g) 3,070(±0,004)
d) 9000(±4000)	h) 0,0100(±0,0004)

B. Kirjutada eelnevates vastustes veaga antud arvud standardkujul.

Vastused

a) $5{,}432(4)\cdot10^{3}$	c) $1{,}35(4)\cdot10^{-1}$	e) $9{,}5(4)\cdot10^{-3}$	g) 3,070(4)
b) $5{,}02(4)\cdot10^{3}$	d) $9(4)\cdot10^{3}$	f) 8,000(4)	h) $1{,}00(4)\cdot10^{-2}$

C. Kirjutada antud arvude tüvenumbrite arv.

Vastused

a) neli	c) kolm	e) kaks	g) neli
b) kolm	d) üks	f) neli	h) kolm

Näide 2. On antud järgmised arvud.

a) $9\cdot10^{3}$ b) $9{,}0\cdot10^{3}$ c) $9{,}00\cdot10^{3}$ d) $9{,}000\cdot10^{3}$

Kirjutada antud arvud üldkujul, märkides ära viimaseks tüvenumbriks oleva nulli.

Vastused

a) 9000 b) $9\underline{0}00$ c) $90\underline{0}0$ d) $900\underline{0}$

Näide 3. Kirjutada järgmised arvud üldkujul ja standardkujul nii, et kõik antud numbrid oleksid tüvenumbrid.

a) 20 b) 100 c) 130 d) 920

Vastused

Üldkujul

a) $2\underline{0}$ b) $10\underline{0}$ c) $13\underline{0}$ d) $92\underline{0}$

Standardkujul

a) $2,0 \cdot 10^1$ b) $1,00 \cdot 10^2$ c) $1,30 \cdot 10^2$ d) $9,20 \cdot 10^2$

Näide 4. Kirjutada järgmised väärtused nelja tüvenumbri täpsusega üldkujul ja standardkujul.

a) 20 m c) 0,001 km e) 100 g g) 0,03 mol

b) 130 cm d) 100000 mm f) 0,1 kg h) 1 dm^3

Vastused

Üldkujul

a) 20,00 m c) 0,001000 km e) 100,0 g g) 0,03000 mol
b) 130,0 cm d) $100\underline{0}00$ mm f) 0,1000 kg h) 1,000 dm^3

Standardkujul

a) $2,000 \cdot 10^1$ m c) $1,000 \cdot 10^{-3}$ km e) $1,000 \cdot 10^2$ g g) $3,000 \cdot 10^{-2}$ mol
b) $1,300 \cdot 10^2$ cm d) $1,000 \cdot 10^5$ mm f) $1,000 \cdot 10^{-1}$ kg h) 1,000 dm^3

Ligikaudsete arvude korrutamine ja jagamine

Ligikaudsete arvude korrutises ja jagatises tuleb säilitada nii mitu tüvenumbrit, kui mitu on neid vähima tüvenumbrite arvuga ligikaudses arvus.

Märkus. Ümardatud murdosa numbrid jäetakse ära. Ümardatud täisosa iga number asendatakse nulliga. Näiteks: 0,123 ümardamisel kahe tüvenumbrini saame 0,12 (murdosa kolmas tüvenumber jäetakse ära); 0,127 ümardamisel kahe tüvenumbrini saame 0,13 (murdosa kolmas tüvenumber jäetakse ära); 121 ümardamisel kahe tüvenumbrini saame 120 (täisosa kolmas tüvenumber asendatakse nulliga).

Näide 1. Leida puittala mass, kui selle mõõtmed on 0,153 m x 0,25 m x 6 m ja 1 m^3 puidu mass on 0,45 tonni.

$$0,153 \text{ m} \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ t/m}^3 = 0,103275 \text{ t} = 0,1 \text{ t}$$

Kõik arvud on saadud mõõtmisel, seega on nad ligikaudsed. Tala pikkus on antud ühe tüvenumbriga, järelikult vastuse ümardame ka ühe tüvenumbrini.

Vastus. Puittala mass on 0,1 tonni.

Näide 2. 34,3 grammi reaktiivi jagati kolmeks võrdseks prooviks. Leida ühe proovi mass.

$$34,3 \text{ g} : 3 = 11,43... \text{ g} \approx 11,4 \text{ g}$$

Formaalselt on arvul 3 ainult üks tüvenumber. Kuna arv on saadud loendamisel (kaaluti kolmeks osaks), siis on see täpne. Vastuses arvestatakse mõõdetud teguri täpsusega. Mõõdetud teguriks on 34,3 g, mida rahuldavad kõik massid, mis on vahemikus 34,25 kuni 34,349... g (kolm tüvenumbrit). Järelikult jagatises ei tohi kolmest numbrist rohkem ega vähem tüvenumbreid anda. Seega ümardame vastuse kolme tüvenumbrini.

Vastus. Iga proovi mass on 11,4 grammi.

Näide 3. Mitu krooni laekus 3 õpilaselt, kui igaüks maksis 375,25 krooni?

3 õpilast · 375,25 krooni/õpilase kohta = 1125,75 krooni

Kuna mõlemad tegurid on saadud loendamisel, antakse vastus täpselt.

Vastus. Raha laekus 1125,75 krooni.

Mitme tehte korral on kasulik ümardada alles arvutuse lõpus. Vahepealsete tehete ümardamisel säilitatakse üks number rohkem (lisanumber), kui reegel ette näeb. Arvuti kasutamisel vahepealsete tehete vastuseid ei ümardata.

Näide 4. Gaasipipeti maht on 0,0573 dm^3. Mõõtmise tingimustel on gaasi tihedus 1,436 g/dm^3. Arvutada gaasi maht ja mass, mis saadi 5 pipeteerimise tulemusena.

Pipeteerimiste arv on täpne. Pipeti maht on antud kolme, tihedus nelja tüvenumbriga. Vastus tuleb anda kolme tüvenumbriga (vähima tüvenumbrite arvuga mõõdetud tegur).

V(gaas) = 5·0,0573 dm^3=0,2865 dm^3(vahetehtena) ≈ 0,287 dm^3 (vastusena)

m(gaas) = 0,2865 dm^3. 1,436 g/ dm^3 = 0,4114 g = 0,411 g

Vastus. Gaasi maht on 0,287 dm^3 ja selle mass on 0,411 g.

Märkus. Kui lähteandmed on antud standardkujul, siis korrutamisel kümne astmed liidetakse, jagamisel lahutatakse.

$7{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{2} = (7{,}0 \cdot 4{,}0) \cdot 10^{-4+2} = 28 \cdot 10^{-2} = 2{,}8 \cdot 10^{-1}$

$6{,}3 \cdot 10^{-2} : 3{,}5 \cdot 10^{-4} = (6{,}3 : 3{,}5) \cdot 10^{-2-(-4)} = 1{,}8.10^{2}$

Ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine

Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tuleb saadud summa ja vahe ümardada madalaima ühise järguni.

Näide 1. Leida järgmiste masside a) 125 g, b) 12,5 g, c) 1,25 g ja d) 0,125 g kogumass.

Kõik massid on antud kolme tüvenumbriga, kui igaühel neist on viimane tüvenumber (viis) erinevas suurusjärgus.

a) 12**5** g
b) 12,**5** g

c) 1,2**5** g
d) <u>0,12**5** g</u>

138,875 ≈ 139 g (ühelised on liidetavate madalaimaks ühiseks järguks). Esitatud masse rahuldavad kõik massid, mis asuvad vahemikus

a) 12**4**,5	—	12**5**,49999... g
b) 12,**4**5 g	—	12,**5**4999... g
c) 1,2**4**5 g	—	1,2**5**499... g
d) 0,12**4**5 g	—	0,12**5**49... g
13**8**,3195 ≈ 138 g		13**9**,4304 ≈ 139 g

Masside minimaalsete ja maksimaalsete väärtuste liitmisel on erinevus 1 gramm. Seetõttu on ka summas viimaseks tüvenumbri järguks ühelised. Saadud tulemus on kooskõlas täpsuse säilitamise nõuetega liitmisel ja lahutamisel.

Vastus. Antud masside kogumass on 139 grammi.

Märkus. Alternatiivse meetodina võib liidetavad eelnevalt ümardada madalaima ühise järguni:

a)125 g
b) 13 g
c) 1 g
d) - .
139 g

Näide 2. Tühja kaaluklaasi mass on 25,435 grammi (analüütilistel kaaludel kaalutud). Kaaluklaasi mass koos reaktiiviga (tehnilistel kaaludel kaalutud) on 31,7 g. Leida reaktiivi mass.

Et reaktiivi ja kaaluklaasi summaarses massis on madalaimaks ühiseks järguks kümnendikud, siis on ka lõppvastus kümnendikkoha täpsusega.

31,7 g - 25,435 g = 6,265 g ≈ 6,3 g või 31,7 g - 25,4 g =6,3 g

Vastus. Reaktiivi mass on 6,3 grammi.

Märkus. Standardkujul antud lähteandmete puhul tuleb enne liitmist või lahutamist kümne astmed võrdsustada.

$4{,}3\cdot10^3 + 9{,}73\cdot10^4 = 0{,}43\cdot10^4 + 9{,}73\cdot10^4 = (0{,}43+9{,}73)\cdot10^4 = 10{,}16\cdot10^4 = 1{,}016\cdot10^4$

<u>**Ligikaudsete arvude kasutamisel ei saa arvutuste tulemus olla täpsem lähteandmete täpsusest.**</u>

Märkus: Praegu kehtivates õpikutes pole tüvenumbritele tähelepanu osutatud. Õpikutes on lähtutud põhimõttest, et lähteandmed on täpsed.
Olümpiaadil tuleb vastuses anda õige tüvenumbrite arv!

Kirjandus:

Rein Pullerits, Maila Mölder, Keemiaülesannete lahendamine, Tln, Avita, 2000, 2001.