

Eesti koolinoorte 64. füüsikaolümpiaad

15. aprill 2017. a. Lõppvoor.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (VASTLALIUG) (8 p.) Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energia vahe sõltub kõrguse muutust. Esimesel lõigul vabaneb potentsiaalne energia $E_1 = mgh$ ja hõõrdejõu mõjul liikumiseks kaotatakse energia $A_1 = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \mu mgh \cot \alpha$. Teisel lõigul vabaneb potentsiaalne energia $E_2 = mgs \sin \beta$ ja hõõrdejõu tõttu kaotatakse energia $A_2 = \mu \cdot mg \cos \beta \cdot s = \mu mgs \cos \beta$. Seega nõlva lõppedes on kelgutajal alles kineetiline energia

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - A_1 + E_2 - A_2 = \\ &= mgh(1 - \mu \cot \alpha) + mgs(\sin \beta - \mu \cos \beta) = 787,4 \text{ J}.\end{aligned}$$

Tasase maa peal enam potentsiaalset energiat ei vabane, aga kineetiline energia väheneb hõõrdumise tõttu. Kelk libiseb tasase maa peal

$$l = \frac{\Delta E}{F_h} = \frac{\Delta E}{\mu mg} = 21,4 \text{ m}.$$

Seega kogu vastlaliu pikkus on $\frac{h}{\sin \alpha} + s + l = 47,2 \text{ m}$.

2. (MÄENÕLV) (8 p.) Vaatleme poole pedaalipöörde jooksul toimuvat protsessi. Selle käigus liigub pedaal, millele rattur jõudu rakendab, jalgratta taustsüsteemis ülalt alla. Nii-öelda laboratoorses taustsüsteemis liigub pedaal ka mäenõlvast üles, sest ratas on edasi liikunud, kuid tuleb arvestada, et jõud on horisontaalne ja pedaali surumisel tehtud töö tuleb leida pedaali horisontaalse nihke kaudu laboratoorses taustsüsteemis. Ratta läbitud vahemaa pikki mäenõlva väntamismehhanismi ülekannete kaudu poole pedaalipöörde jooksul on $l = \frac{\pi r_2 r_4}{r_3}$. Pedaali pöörlemiskese on masskeskme suhtes paigal ning tõuseb horisontaalsihis $h_1 = l \sin \alpha$. Pedaali allasurumisel on selle horisontaalne nihe laboratoorses taustsüsteemis seega $h_2 = 2r_1 - h_1$. Seega, ratturi tehtud töö protsessi jooksul on $A = mgh_2$. See töö peab kompenseerima masskeskme potentsiaalse

energia kasvu $\Delta E_P = (M + m)gh_1$, et kiirus püsiks konstantne. Saame võrrandi:

$$mgh_2 = (M + m)gh_1$$

Asendades suurused ja lahendades võrrandi saame:

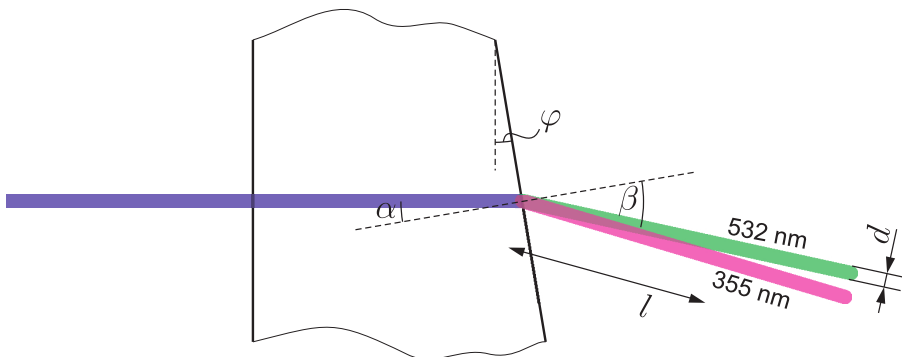
$$\alpha = \arcsin \left(\frac{2mr_1r_3}{(M + 2m)\pi r_2r_4} \right)$$

3. (LASER) (8 p.) Eri värvi komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distantstil l saab võrdseks kiire diameetriga (vt joonis). Vastavalt ülesande andmetele kõik nurgad on väikesed, nii et murdumisseaduses $n_\alpha \sin \alpha = n_\beta \sin \beta$ võib võtta $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\sin \beta \approx \beta$ (kus α ja β mõõdetakse radiaanides). Järelikult seos nurkade vahel muutub lineaarseks: $n_\alpha \alpha \approx n_\beta \beta$. Tänu sellele ei oleks ka lõppvastuse leidmise seisukohalt oluline valguse täpne langemisnurk klaasplaadile (tingimusel, et see nurk on $\ll 1$). Antud ülesande juhul langeb valgus esimesele pinnale risti. Sel juhul langemisnurk teisele pinnale (α) on võrdne nurgaga φ ja murdumisnurk vastavalt $\beta = n\alpha = n\varphi$, kus n on klaasi murdumisnäitaja. Komponentide suundaude erinevus on vastavalt $\Delta\beta = \Delta n\varphi = (n_1 - n_2)\varphi$. Kuna nurk $\Delta\beta$ on väike, siis kiirte tsentrite vaheline kaugus on $\Delta\beta l$, kui nad on kaugusel l plaadi teisest pinnast. Et nad oleks täielikult eraldunud, peab kehtima

$$l\Delta\beta = l(n_1 - n_2)\varphi = d,$$

kust saame

$$l = \frac{d}{(n_1 - n_2)\varphi} = 1,4 \text{ m.}$$



4. (KORVPALL) (8 p.) Kui palli algkiirus on v , siis kiiruse vertikaalsed ja horisontaalsed komponendid on $v \sin(\phi)$ ja $v \cos(\phi)$. Pall liigub mööda parabooli ja poole lennuaja möödudes on vertikaalne kiiruse komponent null. Kuna kiirendus a on konstantne, siis $t/2 = v \sin(\phi)/a$, kust $t = 2v \sin(\phi)/a$. Horisontaalne kiirus ei muutu ja seega horisontaalselt läbitud vahemaa saame leida

$$L = v \cos(\alpha)t = \frac{v^2}{a} \cdot 2 \cos(\phi) \sin(\phi).$$

Kõige kaugemale saab palli mõlemal juhul visata siis, kui viskenurk on 45 kraadi. Seega nurk kahe palli puhul ei muutu ja oluline on see, et kaugus on pöördvõrdeline kiirendusega

$$L \propto 1/a$$

Peame arvestama, et lisaks palli enda raskusjõule mõjub pallile ka üleslükkejõud ja ka pallis oleva gaasi raskusjõudu tuleb arvestada, seega on kahele pallile mõjuvad kiirendused erinevad. Kuna korvpalli kest on õhukene, siis on korvpalli sees oleva gaasi ruumala $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$. Pallidele mõjuvateks summaarseteks jõududeks tuleb kahel juhul

$$F_{\delta hk} = \rho_0 V g - (m + \rho_0 V)g = -mg,$$

$$F_{He} = \rho_0 V g - (m + \rho_{He} V)g = -mg + (\rho_0 - \rho_{He})Vg.$$

Kuna jõud on võrdelised kiirendustega, siis jõudude suhe on ka kiirenduste suhe.

$$\frac{a_{\delta hk}}{a_{He}} = \frac{F_{\delta hk}}{F_{He}} = \frac{mg}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg}.$$

Kuna viske kaugus on võrdeline kiirenduse pöördväärtusega ($L \propto 1/a$), siis saame kauguste suhteks

$$\frac{L_{He}}{L_{\delta hk}} = \frac{a_{\delta hk}}{a_{He}} = \frac{mg}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg} = 1 + \frac{(\rho_0 - \rho_{He})V}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg}.$$

Heeliumiga täidetud korvpalli saab seega visata $\frac{m}{m - (\rho_0 - \rho_{He})V}$ korda kaugemale.

5. (*REISIRONG*) (*8 p.*) Reisijale mõjub kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus. Leiame kõigepealt kui suur on rongi liikumissuunaline kiirendus. Olgu rongi algkiirus v_a ja lõppkiirus v_l . Sellisel juhul kehtib seos $v_a/v_l = \alpha \Rightarrow v_a = \alpha v_l$. Kuna kiirus muutub ühtlaselt (lineaarselt), siis avaldub keskmine kiirus koguteepikkuse ja aja jagatisena ning samuti alg- ja lõppkiiruse keskmisena.

$$\frac{v_a + v_l}{2} = \frac{(\alpha + 1)v_l}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_l = \frac{2s}{(\alpha + 1)t}$$

Liikumissuunaline kiirendus on

$$a_t = \frac{v_a - v_l}{t} = \frac{(\alpha - 1)v_l}{t} = \frac{2(\alpha - 1)s}{(\alpha + 1)t^2}.$$

Järgmiseks uurime kesktõmbekiirendust. Selle jaoks on vaja leida trajektoori raadius, mis ringi korral on $r = s/\varphi$, sest liikumissuuna muutus on võrdne ringjoonel läbitud nurgaga. Leiame kiiruse v_k trajektoori keskpunktis. Selleks kasutame üldist ühtlaselt kiireneval/aeglustuval liikumisel kehtivat valemit $d = (v_2^2 - v_1^2)/(2a)$, mis meie uuritaval juhul tuleb

$$\frac{s}{2} = \frac{v_k^2 - v_a^2}{2a_t}.$$

Sellest avaldame

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{v_a^2 + a_t s} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha s}{(\alpha + 1)t}\right)^2 + \frac{2(\alpha - 1)s^2}{(\alpha + 1)t^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\alpha^2 s^2 + 2(\alpha - 1)(\alpha + 1)s^2}{(\alpha + 1)^2 t^2}} = \\ &= \frac{s}{(\alpha + 1)t} \sqrt{6\alpha^2 - 2}. \end{aligned}$$

Seega kesktõmbekiirendus on

$$a_r = \frac{v_k^2}{r} = v_k^2 \frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{(\alpha + 1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1].$$

Viimane kiirendus on raskuskiirendus ja selle tähtistame g -ga. Kuna kõik kiirendused on risti, siis resultantkiirenduse leidmiseks tuleb liita kiirenduste ruudud ja võtta sellest ruutjuur.

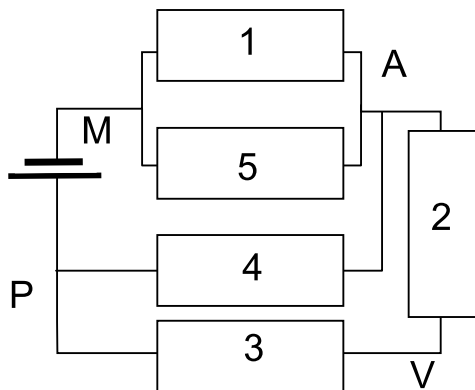
$$a = \sqrt{g^2 + a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{2(\alpha - 1)s}{(\alpha + 1)t^2}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{(\alpha + 1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1]\right)^2}.$$

Kaalu ja massi vahel kehtib seos

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Kui sisestame antud väärtused valemisse, siis saame reisija kiirenduseks $a \approx 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja massiks $m \approx 85,4 \text{ kg}$.

6. (VIISNURK) (10 p.) Joonistame lihtsustatud skeemi arvestades, et ampermeeter ja voltmeeter on ideaalsed. See tähendab, et ampermeetri võib asendada juhtmega ja voltmeetri lihtsalt kõrvaldada. Tähistame uue skeemi sõlmpunktid tähtedega P — patarei plussklemm; M — patarei miinusklenn; A — ampermeetri asukoht; V — voltmeetri alumine klenn. Takistid tähistame numbritega ühest viieni liikudes päripäeva ja alustades viisnurga ülemisest tipust paremale jäävast takistist. Tulemus on toodud joonisel oleva skeemil.



Kirchoffi vooluseaduse tõttu on ampermeetri vool võrdne takistite 4 ja 5 voolude vahega, sest see osa voolust, mis läks läbi takisti 4, aga ei läinud

läbi takisti 5, pidi järelikult läbi ampermeetri minema. Voltmeetri näit on võrdne klemmide M ja V vahelise pingega. Skeemis on takistid 1 ja 5 paralleelselt, seega on nende takistus kokku $\frac{1}{2}\Omega$. Takisti 4 on paralleelselt takistite 2 ja 3 jadaühendusega, seega on nende takistus

$$\frac{1}{\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{2}{3}\Omega$$

Terve skeemi kogutakistus on seega $R_K = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\Omega = \frac{7}{6}\Omega$, koguvool seega $I = \mathcal{E}/R_K = 6\text{ A}$. Takistitest 1 ja 5 läheb sama palju voolu läbi, mistõttu takisti 5 vool on $I_5 = \frac{1}{2}I = 3\text{ A}$ ja pingelang sellel takistil on 3 V . Seega on punktide A ja P vahel pinge 4 V ja vool läbi takisti 4 on $I_4 = \frac{4\text{ V}}{1\Omega} = 4\text{ A}$. Ampermeetri näit on seega $I_4 - I_5 = 1\text{ A}$.

Pinge M ja V vahel on patarei pingest väiksem takisti 3 pinge võrra. Kuna punktide A ja P vahel oli pinge 4 V , siis arvestades, et takistid 2 ja 3 on samasugused ning jadamisi ühendatud, on takistil 3 pinge 2 V . See annab voltmeetri pingeks $7\text{ V} - 2\text{ V} = 5\text{ V}$.

7. (ÕHUPALL) (10 p.) Enne ventiili avamist oli õhk temperatuuril T ja õhu rõhk oli p . Lisaks tähistame, et õhu ruumala oli enne ventiili avamist V ja moolide arv oli n . Siis gaasil oli soojusenergia $E_1 = c_V n T$. Kui kolvi pindala on S ja kolvi liikumise amplituud on L , siis Juku teeb konstantsel jõul F kolvi lõpuni alla vajutades tööd:

$$A_1 = FL = \frac{F}{S}SL = pV.$$

Analoogselt kehtib üldisemalt $\Delta A = p\Delta V$. Olgu pärast õhupalli täitumist õhupalli ruumala V_2 ja gaasi temperatuur selles T_2 . Kuna õhupalli kummi pinget lugesime tühiseks, siis on rõhk palli sees kogu aeg võrdne välise rõhuga p_0 (välja arvatud vahetult ventiili lähedal, kust õhk sisse voolab ja rõhk muutub läbi ventiili minekul, aga vaatleme rõhku ventiilist eemal, õhupalli pinna lähedal). Et suruda õhupallist väljaspool olevat õhku eemale, teeb õhupallis olev gaas tööd $A_2 = p_0 V_2$, arvestades seda, et rõhk õhupalli seinte lähedal on konstantselt väline õhurõhk p_0 . Lõppolekus on täidetud õhupallis soojuslik energia $E_2 = c_V n T_2$. Energia jäävuse tõttu peab soojusenergia vahe võrduma summaarse tööga

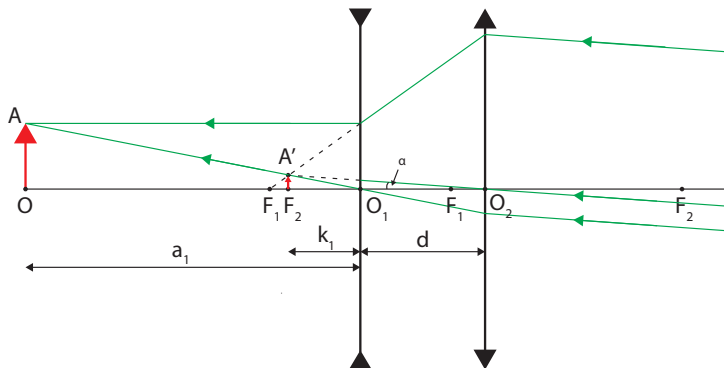
$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \quad \rightarrow \quad c_V n T_2 - c_V n T = pV - p_0 V_2.$$

Töö märgid valisime arvestades seda, et Juku tehtud töö A_1 andis gaasile soojusenergiat juurde, aga gaas ise tegi töö A_2 , mis võttis soojusenergiat vähemaks. Nii alg- kui lõppolekus kehtib ideaalse gaasi seadus, vastavalt $pV = nRT$ ja $p_0V_2 = nRT_2$. Nende abil saame energia jäävuse seadusest kirjutada

$$c_V n T_2 - c_V n T = nRT - nRT_2 \quad \rightarrow \quad n(c_V + R)(T_2 - T) = 0.$$

Viimasest seosest saame $T_2 = T$. Õhutemperatuur ei muutunud.

8. (KAAMERA) (10 p.) On selge, et kunas virmalised asuvad kaugel, siis peab terava kujutise tekkimiseks olema valgustundlik element esialgse läätse fookuses, st kaugusel $f = 14$ cm. Kunas läätse keskpunkti läbiv kiir suunda ei muuda, siis saame esialgseks vaatenurgaks $2\alpha = 2 \arctan(h/f)$.



Joonisel on kujutatud kompaktse kaamera skeem. Vaatleme lihtsuse huvides olukorda tagurpidi, vaadeldav objekt asub fototundliku elemendi asemel ning kujutis konstrueeritakse lõpmatuses (kiirte pööratavuse printsiip). Nõguslääts, mis on paigutatud kaugusele d kumerläätselt, tekitab objektist A näiva kujutise A' . Seda näivat kujutist vaadeldakse kumerläätsiga, mis konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kirja saab

panna järgnevad võrrandid

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

$$k_1 + d = f_2 \quad (2)$$

$$a_1 + d = L_m. \quad (3)$$

Neist esimene leiab nõgusa läätsse poolt näiva kujutise asukoha. Teine võrrand garanteerib, et kumerlääts konstrueerib sellest kujutise lõpma- tuses. Kolmas võrrand tagab, et kogu süsteem oleks kompaktne. Lisaks eeltoodud võrranditele on vaja säilitada ka esialgse kaamera vaatenurk. Selleks märkame, et joonisel toodud nurk $\angle A'O_2F_2 = \alpha$. Seetõttu saame kirja panna

$$\frac{h'}{f_2} = \frac{h}{f}, \quad (4)$$

kus h' tähistab kujutise A' kõrgust, mille saame leida kolmnurkade OAO_1 ja $F_2A'O_1$ sarnasusest

$$h' = h \frac{k_1}{a_1}. \quad (5)$$

Lahendades võrranditest (1) - (5) tekkinud süsteemi saame

$$f_1 = \frac{f_2 f (L_m - f_2)}{(f - f_2)^2} \approx 1,39 \text{ cm} \quad (6)$$

$$d = \frac{f_2 (f - L_m)}{f - f_2} \approx 1,91 \text{ cm}. \quad (7)$$

9. (KATUS) (12 p.) Kahe traadi kontaktpunktis A (vaata joonist allpool) mõjutavad traadid sümmeetria ja Newtoni III seaduse tõttu üksteist horisontaalsete vastassuunaliste jõududega; traadi ja silindri puutepunktis B mõjub traadile rõhumisjõud, mis on traadiga risti ning seetõttu läbib selle jõu pikendus silindri telge Q . Raskusjõud on rakendatud traadi keskpunkti C . Et traat on tasakaalus ja talle mõjuvad kolmes punktis jõud, siis nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis O (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Niisiis

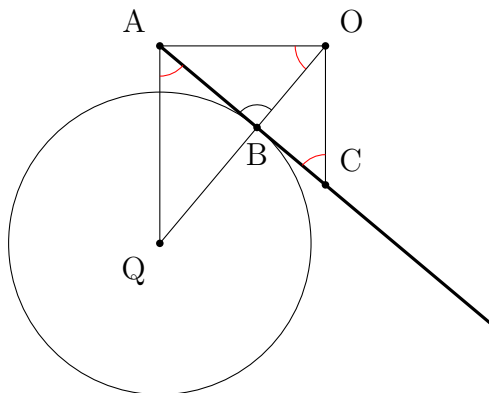
peavad punktist A tõmmatud horisontaal, punktist C tõmmatud vertikaal ning sirge QB pikendus kõik lõikuma ühes punktis. Paneme tähele, et $\angle ACO = \alpha/2$ ja $\angle AOB = \alpha/2$, seetõttu

$$|AO| = |AC| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin(\alpha/2),$$

$$|AB| = |AO| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2)$$

ning

$$R = |QB| = |AB| \tan(\alpha/2) = (L/2) \sin^3(\alpha/2) / \cos(\alpha/2).$$



Stabiilsuse analüüsi juures paneme tähele, et kui “katus” pöörleb tervikuna, siis massikese liigub mööda ringjoont ning küsimus on vaid selles, kas see on kõrgemal või madalamal kui silindri telg Q ; viimasel juhul on massikese algasendis madalaimas positsioonis ning süsteem on stabiilne. Seega on stabiilsuse tingimuseks

$$|AQ| < |AC| \cos(\alpha/2).$$

Kui sellesse võrratusse asendame

$$|AQ| = |AB| / \cos(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$$

ja

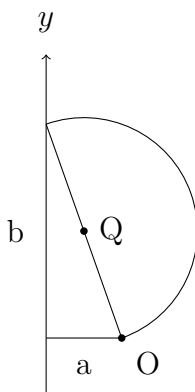
$$|AC| \cos(\alpha/2) = (L/2) \cos(\alpha/2),$$

siis saame, et $\sin^2(\alpha/2) < \cos^2(\alpha/2)$. Kuna katuse korral peab kehtima $0 < \frac{\alpha}{2} < 90$, siis nii \sin kui \cos on positiivsed ja võime võtta mõlemalt poolt ruutjuure. Saame tingimuse $\sin(\alpha/2) < \cos(\alpha/2)$, mis kehtib kui $\alpha < \pi/2$. Paneme tähele, et viimast tingimust võib esitada erinevatel viisidel kasutades R , L ja α vahelist seost.

10. (ELEKTRONID) (12 p.) Maksimaalse y -telje sihilise läbimõõdu leidmiseks vaatleme osakesi, mis liiguvad $x - y$ -tasandis. Sellisel juhul on elektroni trajektooriks ringjoon, sest magnetvälja poolt mõjuv jõud $F = evB$ on konstantse suurusega ja kiirusega kogu aeg risti. Kui elektroni oleks ka z suunaline komponent, siis oleks trajektooriks heeliks, mille raadius oleks väiksem ja seega tuleks ka y -suunaline läbimõõt väiksem. Raadiuse saame leida, pannes magnetvälja poolt mõjuva jõu võrduma kesktõmbejõuga

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{Be}.$$

Kõik selles tasandis olevad elektronid liiguvad sama raadiusega ringjoonel ja eri nurkade all liikuva elektronide trajektoorid saab leida seda ringjoont lihtsalt pöörates ümber punkti O . Kõige kaugemale y -telje positiivses suunas jõuab elektron siis, kui ekraani tabades on ta algpunktist võimalikult kaugel ehk läbinud täpselt pool ringjoone kaart, vaata joonist:



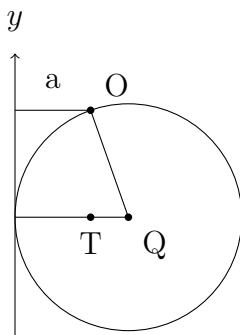
Kuna ekraan on kaugusel a elektronide allikast, siis Pythagorase teoreemi

järgi saame laigu maksimaalseks y väärtuseks

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4 \left(\frac{mv}{Be} \right)^2 - a^2}.$$

Siit näeme, et väiksemale R -ile vastab väiksem läbimõõt ja maksimaalne y -telje sihiline läbimõõt on tõesti siis, kui osake liigub $x - y$ -tasandis, nagu ka alguses väitsime.

Ringjoone kaart ümber punkti O pöörates näeme, et minimaalne y -suunalise väärtuse korral on ringjoon ekraanile puutujaks, vaata joonist:



Kuna lõigu QT pikkus on $R - a$, siis lõigu OQ y -suunalise komponendi saab leida Pythagorase abil

$$y_{min} = -\sqrt{R^2 - (R - a)^2} = -\sqrt{2aR - a^2} = -\sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2}.$$

Seega laigu y -suunaline läbimõõt on

$$L = \sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2} + \sqrt{4 \left(\frac{mv}{Be} \right)^2 - a^2}.$$

Selle laigu peal on heledus kõige suurem maksimaalse y väärtuse korral, sest see vastab elektroni y -telje sihilise kõrvalekalde Δ_y ekstreemumile. Kui tähistame elektroni stardinurga α abil, siis

$$\frac{d\Delta_y}{d\alpha} = 0,$$

st väikeses stardinurga vahemikus $\Delta\alpha$ saabuvad kõik elektronid peaaegu täpselt samasse sihtpunkti.

Leiame z -telje sihilise läbimõõdu tasandis $y = 0$. Kõige kaugemale z -teljel jõuavad need on osakesed, mille heeliksikujuline trajektoor puudutab tasandit $x = -a$ ("ülaltvaates" $x - y$ -tasandile puudutab ringjoonekujuline trajektoor raadiusega $r = \frac{a}{2}$ joont $x = -a$) ja mis stardivad $y - z$ -tasandis, st algkiirusega, mille x -projektsioon $v_x = 0$. Edasi leiame

$$\frac{a}{2} = \frac{mv_y}{Be} \Rightarrow v_y = \frac{aBe}{2m} \Rightarrow v_z = \sqrt{v^2 - \left(\frac{aBe}{2m}\right)^2}.$$

Sellise algkiirusega elektronide teekond kestab pool tsüklotronperioodist. Perioodi saab leida seosest $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Be}$. Pool perioodi on seega $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{Be}$ ning laigu z -telje sihiliseks mõõtmeks saame

$$2 \cdot tv_z = \pi \sqrt{\left(\frac{2mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

E1.(RUUMALAD)(12 p.)

Kasutame joonlauda kangina. Toetuspunktiks on lauaserb. Leiame joonlaua massikeskme. Edaspidi on joonlaua massikese täpselt laua serval. Leiame kehade jõuõlgade l_{A1} ja l_{B1} pikkused toetuspunktist. Siis kangireegli järgi kehtib

$$m_A l_{A1} = m_B l_{B1}$$

Nüüd uputame keha A keha vette ning leiame uuesti jõuõlgade l_{A2} ja l_{B2} kaugused toetuspunktist. Kehale A mõjub ka üleslükkejõud $F_y = \rho_{vesi} g V_A$ ja kangireeglist saame

$$(m_A - \rho_{vesi} V_A) l_{A2} = m_B l_{B2}$$

Nüüd võtame keha A veest välja ja uputame keha B keha vette ning leiame uuesti jõuõlgade l_{A3} ja l_{B3} kaugused toetuspunktist. Kehale B mõjub üleslükkejõud $F_y = \rho_{vesi} g V_B$ ja kangireeglist saame

$$m_A l_{A3} = (m_B - \rho_{vesi} V_B) l_{B3}$$

Tiheduste suhe on ruumalade ja masside suhe

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A V_B}{m_B V_A}$$

Kõikidest eelnevatest võrranditest koosnevast süsteemist tiheduste suhte avaldades saame

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{1 - \frac{l_{A3}l_{B1}}{l_{A1}l_{B3}}}{1 - \frac{l_{A1}l_{B2}}{l_{A2}l_{B1}}}$$

E2. (ÕHUPALL 2)(12 p.) Asetame õhupalli millimeeterpaberile ja sellele koormise. Võttes eelduseks, et väikeste deformatsioonide korral ei muutu oluliselt õhupalli ruumala, siis järelikult ei muutu oluliselt ka õhupallis olev rõhk. Koormise tõttu suureneb õhupalli ja millimeetripaberi kokkupuutepind, mille leiame märkides selle markeriga paberile. Teine variant on õhupall eelnevalt markeriga kokku määrada ja mõõta paberile jääva jälje pindala. Õhupalli horisontaalseks surutud pind mõjub lauale jõuga $\Delta p S$, kus Δp on õhupallis olev lisarõhk ja S on õhupalli ja laua kokkupuutepinna suurus. Lugesed õhupalli massi tühiseks, peab see jõud olema võrdne koormise raskusjõuga mg , kus m on koormise mass. Õhupallis olev lisarõhk avaldub seega $\Delta p = mg/S$ ja kokkuvõttes on õhupalli sees olev rõhk õhurõhust $\eta = (p_0 + \Delta p)/p_0$ korda suurem.

Märkus: Õhupallis oleva pinge saame jätta arvestamata, kunas õhupalli ja millimeetripaberi kokkupuutepind on horisontaalne ning seega puudub pinge vertikaalne komponent.