Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks (ülemaste)

Arvuteooria I

Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

27. august 2014. a.

Sissejuhatus

Arvuteooria ülesandeid esineb peaaegu igal matemaatikavõistlusel, hoolimata võistluse raskusastmest või vanuserühmast. Seejuures suure osa arvuteooria ülesannete puhul (eriti Eesti-sisestel matemaatikavõistlustel) on tegemist jaguvusega. Kuigi jaguvuse ja jääkidega puututakse kokku juba algklassides, osutuvad need ülesanded õpilastele tihtipeale üle jõu käivateks.

Käesolev materjal on arvuteooria ülemastme võistlusülesannete lahendamisoskuse harjutamiseks mõeldud esimene töövihik. Selle vihiku enamus ülesandeid on lahendatavad viie põhimeetodi abil.

Nendeks on teisendusmeetod, algteguriteks lahutamise meetod, jääkide läbivaatamise meetod, matemaatilise induktsiooni meetod ning jagatava ja jagaja hindamismeetod. Lisaks sellele kasutame astmetega jaguvusülesannete lahendamisel näiteks Newtoni binoomvalemit jne.

Käesoleva materjali põhieesmärgiks on tutvustada Teile neid lahendamismeetodeid, mille põhjal saate lahendada kas analoogiliseid või sarnaseid ülesandeid (kusjuures soovitame enda lahendusi lühidalt kirja panna selleks eraldatud kohta).

Jaguvus

Definitsioon 1. Ütleme, et täisarv a *jagab* täisarvu b ja kirjutame $a \mid b$, kui leidub täisarv c, mille korral $b = ac$. Samuti räägitakse, et arv a on arvu b *tegur*. Kui täisarv a ei jaga täisarvu b, siis kirjutame $a \nmid b$.

Sama võrduse $b = ac$ kehtivuse korral ütleme ka, et täisarv b *jagub* täisarvuga a ja kirjutame $b \vdots a$. Samuti räägitakse, et arv b on arvu a *kordne*.

Märkus.

- Kui täisarv a jagab täisarvu b, siis $\dfrac{b}{a}$ on ka täisarv.
- Kuna $0 = a \cdot 0$, siis $a \mid 0$ iga täisarvu a korral. Märgime, et $0 \nmid b$ iga nullist erineva täisarvu b korral.
- Fikseeritud täisarvu a korral leidub lõpmata palju arvu a kordseid:

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$$

Lause 2. *Olgu a, b ja c täisarvud. Kehtivad järgmised omadused:*

a) $a \mid a$ *(refleksiivsus);*

b) kui $a \mid b$ *ja* $b \mid c$*, siis* $a \mid c$ *(transitiivsus);*

c) kui $a \mid b$ *ja* $b \neq 0$*, siis* $|a| \leq |b|$*;*

d) kui $a \mid b$ *ja* $a \mid c$*, siis* $a \mid xb + yc$ *suvaliste täisarvude* x *ja* y *korral;*

e) kui $a \mid b$ *ja* $a \mid b \pm c$*, siis* $a \mid c$*;*

f) kui $a \mid b$ *ja* $b \mid a$*, siis* $|a| = |b|$*;*

g) kui $a \mid b$ *ja* $b \neq 0$*, siis* $\dfrac{b}{a} \mid b$*;*

h) kui $c \neq 0$*, siis* $a \mid b$ *parajasti siis, kui* $ac \mid bc$*.*

Märkus. Sümbol $|a|$ tähistab nagu ikka arvu a absoluutväärtust.

Tõestus. Lause 2 väidete tõestamiseks peaks vahetult kasutama jaguvuse definitsiooni 1. Siinkohal toome kõikide väidete täielikud tõestused koos vajalike kommentaaridega, seejärel anname ka Teile võimaluse sarnaste tõestuskäikude proovimiseks ülesande 4 lahendamisel.

a) Selleks et täisarv a jagaks täisarvu a, peab definitsiooni järgi leiduma selline täisarv c, mille korral $a = ac$. Ilmselt selline arv leidub, nimelt $c = 1$.

b) Teame, et $a \mid b$, see tähendab, et leidub selline täisarv d, et $b = ad$. Analoogiliselt, kuna $b \mid c$, siis leidub selline täisarv e, et $c = be$. Seega

$$c = be = (ad)e = (de)a,$$

millest järeldub väide $a \mid c$.

c) Tingimusest $a \mid b$ järeldub, et leidub selline täisarv c, et $b = ac$. Viimasest võrdusest aga järeldub võrdus $|b| = |a||c|$. Kuna $b \neq 0$, siis $|c| \geq 1$. Seega saame

$$|b| = |a||c| \geq |a|.$$

d) Teame, et $a \mid b$ ja $a \mid c$, seega leiduvad sellised täisarvud d ja e, et $b = ad$ ja $c = ae$. Siis mistahes täisarvude x ja y korral kehtib võrdus

$$xb + yc = x(ad) + y(ae) = (xd + ye)a,$$

mis tõestab väite.

e) Tingimustest $a \mid b$ ja $a \mid b \pm c$ järeldub, et leiduvad sellised täisarvud d ja e, et $b = ad$ ja $b \pm c = ae$. Neid võrdusi kasutades saame

$$\pm c = ae - b = ae - ad = (e - d)a$$

ehk $c = \pm(e - d)a$.

f) Kuna $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Kasutades väidet c), saame $|b| \geq |a|$ ja $|a| \geq |b|$, millest järeldub võrdus $|a| = |b|$.

g) Kuna $a \mid b$, siis $\frac{b}{a}$ on nullist erinev täisarv. Ütleme, et $\frac{b}{a} = c \neq 0$. Sellest aga järeldub, et $b = ac$ ehk $c \mid b$.

h) Tingimusest $a \mid b$ saame, et $a \neq 0$ ja leidub selline täisarv d, mille korral $b = ad$. Nüüd väited $a \neq 0$ ja $c \neq 0$ kehtivad parajasti siis, kui $ac \neq 0$. Seega võrdus $b = ad$ kehtib parajasti siis, kui $bc = (ac)d$. □

Üks just tõestatud lause väidetest omab ka konkreetset tähendust. Selle järgi võib lihtsalt kindlaks teha, kas fikseeritud täisarvul on paaris või paaritu arv tegureid. Proovige endale selgeks teha, millist väidet võib selleks kasutada, ja seejärgi lahendada järgmist ülesannet.

Ülesanne 3. Olgu n positiivne täisarv.

a) Põhjendage, et kui arvul n on täpselt 2009 erinevat positiivset tegurit, siis see on mingi täisarvu ruut.

b) Leidke arvu n erinevate positiivsete tegurite korrutis, kui neid on täpselt 2008.

Lahendus.

Ülesanne 4. Olgu a, b, c ja d täisarvud. Tõestage järgmised omadused:

a) $1 \mid a$;

b) $0 \mid a$ parajasti siis, kui $a = 0$;

c) kui $a \mid b$, siis $a \mid be$ suvalise täisarvu e korral;

d) kui $a \mid b$ ja $c \mid d$, siis $ac \mid bd$;

e) kui $a \mid bc$ ning a ja c on ühistegurita, siis $a \mid b$.

Tõestus.

Näide 5. Näitame, et murd $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ on taandumatu mistahes positiivse täisarvu n korral. Murd on taandumatu, kui murru nimetajal ja lugejal ei leidu ühist ühest erinevat tegurit.

Oletame vastuväiteliselt, et selline tegur leidub. Ütleme, et $a \mid 12n+1$ ja $a \mid 30n+2$, kus $a > 1$. Siis leiduvad sellised täisarvud b ja c, et $12n+1 = ab$ ja $30n+2 = ac$. Lahendades võrrandisüsteemi, saame võrduse $a(5b-2c) = 1$, mis on vastuolus täisarvu a valikuga (meil on eeldatud, et $a > 1$).

Ülesanne 6. Tõestage, et murd $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ on taandumatu mistahes positiivse täisarvu n korral.

Tõestus.

Definitsioon 7. Olgu a, b, q ja r täisarvud, kusjuures $0 \leq r < a$. Kui kehtib võrdus $b = aq + r$, siis öeldakse, et arv r on arvu b jagamisel arvuga a tekkiv *jääk*.

Järgmist tulemust nimetatakse jaguvuse algoritmiks ja see mängib väga tähtsat rolli arvuteoorias.

Lause 8. *Mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r nii, et* $b = aq + r$, *kus* $0 \leq r < a$.

Tõestus. Selleks, et tõestada seda lauset, peame näitama kahte asja: esimesena peaks tõestama, iga paari (a, b) korral leidub vähemalt üks vastava omadusega paar (q, r), ja teisena, et leidub parajasti üks selline paar.

Kuna a ja b võivad olla suvalised positiivsed täisarvud, siis paari (q, r) olemasolu näitamiseks peaks läbi vaatama kolme juhtumit: $a > b$, $a = b$ ja $a < b$.

1. Juhul kui $a > b$, võtame $q = 0$ ja $r = b < a$. Seega $(q, r) = (0, b)$.
2. Juhul kui $a = b$ tõestage ise!

3. Juhul kui $a < b$, leidub selline positiivne täisarv c nii, et $ac > b$. Olgu q kõige väiksem positiivne täisarv, mille korral $a(q+1) > b$ (sellest järeldub, et $a > b - aq$). Siis $aq \leq b$. Võttes $r = b - aq$ saame, et $b = aq + r$, kus $0 \leq r < a$.

Sellega on paari (q, r) olemasolu tõestatud.

Nüüd näitame, et leidub parajasti üks selline paar. Oletame vastuväiteliselt, et positiivsete täisarvude a ja b korral leiduvad erinevad positiivsete täisarvude paarid (q_1, r_1) ja (q_2, r_2) nii, et $b = aq_1 + r_1$ ja $b = aq_2 + r_2$, kus $0 \leq r_1, r_2 < a$. Siis võrdusest $aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$ saame, et

$$a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

Seega $a \mid r_2 - r_1$. Tingimusest $0 \leq r_1, r_2 < a$ järeldub, et $|r_2 - r_1| < a$. Seega $a \mid r_2 - r_1$ parajasti siis, kui $|r_2 - r_1| = 0$ ehk $r_1 = r_2$. Ilmselt ka $q_1 = q_2$. Saadud vastuolu tõestab lause. □

Ülesanne 9. Olgu $p \geq 61$ algarv (*algarvuks* nimetatakse arvu $p > 1$, mille ainukesed positiivsed tegurid on 1 ja p). Kas arvu p jagamisel arvuga

a) 30, b) 60

tekkiv jääk võib olla kordarv?

Lahendus.

a) Olgu $p = 30q + r$, kus $0 \leq r < 30$. Tõestame, et r ei või olla kordarv. Oletame vastuväiteliselt, et r avaldub kujul $r = ab$, kus $1 < a, b < r$ ja vähemalt üks täisarvudest a ja b on $\sqrt{30}$-st väiksem. Et arv 30 jagub kõigi $\sqrt{30}$-st väiksemate algarvudega (st arvudega 2, 3 ja 5), siis nii $30q$ kui ka r jaguvad ühega neist arvudest. See aga tähendab, et selle arvuga jagub ka algarv p, mis on võimatu. Seega r ei või olla kordarv.

b) Lahendage ise!

Arvuteooria võistlusülesannete hulgas on väga palju järgmise kujuga ülesandeid: "Tõestage, et mistahes täisarvu(de) korral üks avaldis (või arv) jagab teist avaldist". Nende ülesannete lahendamise käigus võib kasutada mitut erinevat lähenemist.

Näide 10. Esimeseks võimaluseks on vastava avaldise otsene teisendamine kujule, millest kasutades jaguvuse definitsiooni või omadusi saab järeldada väite. Tõestame, et kui $a - b \mid ac + bd$, siis $a - b \mid ad + bc$ suvaliste täisarvude a, b, c ja d korral. Selle ülesande lõppeesmärgiks on avaldise $ad + bc$ esitamine selliste avaldiste summana, mis jaguvad avaldisega $a - b$. Tingimusest teame, et avaldis $a - b$ jagab avaldisi $x(a - b)$ ja $y(ac + bd)$ suvaliste täisarvude x ja y korral. Kuna

$$ad + bc = a(d + c - c) + b(c + d - d) = (ac + bd) + (d - c)(a - b),$$

siis lause 2 väite $d)$ põhjal $a - b \mid ad + bc$.

Näide 11. Tõestame, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv $3a + 7b$ jagub arvuga 83 siis ja ainult siis, kui $25a + 3b$ jagub arvuga 83. Selle tõestamiseks piisab tuletada võrdus

$$11(3a + 7b) + 2(25a + 3b) = 83(a + b).$$

Ülesanne 12. Antud täisarvude a, b, c, d ja n korral kehtivad $n \mid ad - bc$, $n \mid a - b$ ning arvude b ja n ainsad ühised jagajad on ± 1. Tõestage, et $n \mid c - d$.

Tõestus.

Ülesanne 13. Tõestage, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv $2a + 3b$ jagub arvuga 17 siis ja ainult siis, kui $9a + 5b$ jagub arvuga 17.

Tõestus.

Näide 14. Nüüd näitame, et avaldis $n^5 - n$ jagub arvuga 30 iga täisarvu n korral. Teisendame avaldist:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

Nüüd peaks tõestama, et nelja teguri korrutis jagub 30-ga. Paneme tähele, et $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, kus 2, 3 ja 5 on paarikaupa ühistegurita. Seega 30-ga jaguvuse näitamine on samaväärne sellega, kui näitame, et arv jagub kahega, kolmega ja viiega.

Näitame jaguvust kahega. Korrutis $n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ sisaldab tegurit $n - 1$ ja tegurit n, mis on kaks järjestikust täisarvu. Seega üks neist peab jaguma kahega ning kogu korrutis peab jaguma kahega.

Kolmega jaguvuse tõestamine on analoogne, kuna $n - 1$, n ja $n + 1$ on kolm järjestikust täisarvu. Nendest täpselt üks jagub kolmega ning seega ka kogu korrutis jagub kolmega.

Viiega jaguvuse näitamisel märkame, et kui üks teguritest $n - 1$, n või $n + 1$ jagub viiega, siis jagub ilmselt kogu korrutis viiega. Kui aga ükski nendest ei jagu viiega, siis kuna viiest järjestikusest täisarvust täpselt üks jagub viiega, peab viiega jaguma $n - 2$ või $n + 2$ (need pole aga vaadeldava korrutise teguriteks). Meil on vaja näidata, et mõlemal juhul jagub ka $n^2 + 1$ viiega (mis on vaadeldava korrutise teguriks). Teeme avaldisega $n^2 + 1$ teisenduse

$$n^2 + 1 = (n^2 - 4) + 5 = (n - 2)(n + 2) + 5,$$

millest on näha, et kui $n - 2$ või $n + 2$ jagub viiega, siis ka $n^2 + 1$ jagub viiega. Seega oleme näidanud viiega jaguvuse kõigi võimalike juhtude jaoks.

Vaatame korra ülesandele tagasi ning võtame kokku, mis me sellest õppisime. Kõige pealt viisime avaldise sobivale kujule ning 30-ga jaguvuse asemel vaata-sime jaguvust kahe, kolme ja viiega (algteguriteks lahutamine). Seejärel kasutasime, et k-st järjestikusest täisarvust täpselt üks jagus arvuga k. Lõpus kasutasime avaldise teisendamist kujule, kus kõik liidetavad jaguvad soovitud arvuga.

Näide 15. Järgmisena leiame kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $n^8 - n^2$ jagub arvuga 72. Lahutame arvu $n^8 - n^2$ teguriteks:

$$\begin{aligned} n^8 - n^2 &= n^2(n^6 - 1) = \\ &= n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1) = \\ &= n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1). \end{aligned}$$

Et $72 = 8 \cdot 9$ ning arvud 8 ja 9 on ühistegurita, piisab uurida, millal arv $n^8 - n^2$ jagub arvudega 8 ja 9.

- Näitame kõigepealt, et arv $n^8 - n^2$ jagub alati arvuga 9. Vaatleme kolme juhtu (sõltuvalt sellest, millist jääki annab arv n jagamisel kolmega):

  1. kui $n = 3k$, siis tegur $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$ jagub üheksaga;
  2. kui $n = 3k + 1$, siis mõlemad tegurid $n - 1 = 3k$ ja $n^2 + n + 1 = 3(3k^2 + 3k + 1)$ jaguvad kolmega;
  3. kui $n = 3k - 1$, siis mõlemad tegurid $n + 1 = 3k$ ja $n^2 - n + 1 = 3(3k^2 - 3k + 1)$ jaguvad kolmega.

  Seega igal vaadeldud juhul arv $n^8 - n^2$ jagub arvuga 9.

- Vaatleme nüüd arvu $n^8 - n^2$ jaguvust arvuga 8. Nüüd vaatleme kahte juhtu (sõltuvalt sellest, kas n on paaris või paaritu arv):

  1. kui $n = 2k$, siis ainus paarisarvuline tegur on $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, mis jagub arvuga 8 siis, kui k jagub kahega ehk kui n jagub neljaga;
  2. kui $n = 2k + 1$, siis $(n - 1)(n + 1) = 4k(k + 1)$ jagub arvuga 8, sest kahe järjestikuse arvu korrutis $k(k + 1)$ jagub alati kahega.

Seega vastuseks saame, et arv $n^8 - n^2$ jagub arvuga 72 siis ja ainult siis, kui n ei jagu neljaga.

Ülesanne 16. Tõestage, et

a) mistahes kahe paaritu arvu ruutude vahe jagub arvuga 8;

b) mistahes kahe kolmest mitteväiksema algarvu ruutude vahe jagub arvuga 24.

Tõestus.

Ülesanne 17. Tõestage, et iga naturaalarvu a ja b korral $ab(a^4 - b^4)$ jagub arvuga 30.

Tõestus.

Ülesanne 18. Tõestage, et suvaliste täisarvude a, b ja c korral $7 \mid a^2 + b^2 + c^2$ parajasti siis, kui $7 \mid a^4 + b^4 + c^4$.
Kas kehtib ka järgmine väide: suvaliste täisarvude a, b, c ja d korral $7 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ parajasti siis, kui $7 \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4$?

Tõestus.

Edaspidi räägime veel ühest meetodist, mida jaguvusülesannetes tihti kasutatakse. Kui on vaja tõestada, et mingit astet sisalduv avaldis jagub teise avaldisega (või arvuga), siis on tarvis kasutada järgmisi teadmisi:

- mistahes täisarvude a ja b ning iga täisarvu n korral $a - b \mid a^n - b^n$, sest

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1b^{n-2} + b^{n-1}\right);$$

- mistahes täisarvude a ja b ning iga paaritu täisarvu n korral $a + b \mid a^n + b^n$, sest

$$a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 - \ldots - a^1b^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Niisuguste ülesannete lahendamise teiseks meetodiks on Newtoni binoomvalemi rakendamine:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

kus $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ja $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

Näide 19. Näitamiseks, et arv 10 jagab arvu $3^{2009} + 7^{2009}$ piisab kasutada

$$a + b \mid a^n + b^n$$

märkides, et 2009 on paaritu arv.

Näide 20. Nüüd kasutame mõlemat meetodit järgmise ülesande lahendamisel. Tõestame, et iga positiivse täisarvu n korral arv $(n+1)^n - 1$ jagub arvuga n^2.

- Kasutades samasust

  $$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + b^{n-1}\right)$$

  juhul $a = n+1$ ja $b = 1$ saame

  $$(n+1)^n - 1 = (n+1-1)\left((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + 1\right),$$

  kus esimene tegur on n ja teine tegur koosneb n liidetavast, mis kõik annavad n-ga jagamisel jäägi 1. Tõestage see väide ise (ülesanne 21). Seega nii esimene kui ka teine tegur jagub arvuga n ning kogu korrutis jagub arvuga n^2.

Ülesanne 21. Arv a annab arvuga k jagamisel jäägi 1. Tõestage, et ka selle mis tahes positiivse astendajaga aste a^m annab k-ga jagamisel jäägi 1.

Lahendus.

- Rakendades Newtoni binoomvalemit $a = 1$ ja $b = n$ korral ning arvestades, et $\binom{n}{1} = n$, saame

$$(n+1)^n - 1 = 1 + n \cdot n + \binom{n}{2} n^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} n^{n-1} + n^n - 1,$$

  kus paremal pool pärast esimese ja viimase liikme koondamist kõik ülejäänud liikmed jaguvad arvuga n^2.

Ülesanne 22. Tõestage, et mistahes naturaalarvu n korral $19 \mid 5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$.

Tõestus.

Ülesanne 23. Leidke arvu 11^{2008} kaks viimast numbrit.

Lahendus.

Järgnevas kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit jaguvusülesannete lahendamiseks. Olgu $A(n)$ üldväide, mille parameetri n võimalikud väärtused on naturaalarvud. Selle tõestamiseks tuleb näidata kahe eelduse täidetust:

I väide $A(1)$ kehtib, kus 1 tähendab parameetri n esimest võimalikut väärtust (induktsiooni baas);

II iga naturaalarvu k puhul sellest, et väide $A(k)$ kehtib, järeldub, et ka väide $A(k+1)$ kehtib (induktsiooni samm).

Siis saab üldistada, et väide $A(n)$ kehtib mistahes naturaalarvu n korral.

Näide 24. Matemaatilise induktsiooni abil tõestame, et kõik arvud 10017, 100117, 1001117 jne jaguvad arvuga 53. Induktsiooni baasi tõestamiseks peaks näitama, et esimene arv 10017 jagub arvuga 53. Kontroll näitab, et

$$10017 = 53 \cdot 189.$$

Nüüd oletame, et arv $100\underbrace{11\ldots11}_{k}7$ jagub arvuga 53 ja näitame, et ka temast järgmine arv $100\underbrace{11\ldots111}_{k+1}7$ jagub arvuga 53. Selleks leiame nende arvude vahe:

$$100\underbrace{11\ldots111}_{k+1}7 - 100\underbrace{11\ldots11}_{k}7 = (1001 - 100) \cdot 10^{k+1} = 901 \cdot 10^{k+1}.$$

Kuna eelduse kohaselt arv $100\underbrace{11\ldots11}_{k}7$ jagub 53-ga ja

$$901 \cdot 10^{k+1} = 53 \cdot 17 \cdot 10^{k+1}$$

jagub 53-ga, siis ka $100\underbrace{11\ldots111}_{k+1}7$ jagub arvuga 53.

Lõpuks saame üldistada, et matemaatilise induktsiooni kaudu kõik arvud 10017, 100117, 1001117, jne jaguvad arvuga 53.

Ülesanne 25. Tõestage, et kõik arvud 120308, 1203308, 12033308, 120333308, jne jaguvad arvuga 19.

Tõestus.

Näide 26. Tõestame, et iga naturaalarvu n korral $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Kontrollime väite õigsust kui $n = 1$. Saame $11^2 + 12 = 133$ ja ilmselt $133 \mid 133$.

Nüüd oletame, et $n = k$ korral $133 \mid 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ ja näitame, et ka $n = k + 1$ korral väide kehtib:

$$\begin{aligned} 11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} &= 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k-1} = \\ &= 11 \cdot \left(11^{k+1} + 12^{2k-1}\right) + 12^{2k-1} \cdot \left(12^2 - 11\right) = \\ &= 11 \cdot \underbrace{11^{k+1} + 12^{2k-1}}_{\vdots 133} + \underbrace{12^{2k-1} \cdot 133}_{\vdots 133} \end{aligned}$$

Seega iga naturaalarvu n korral $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Ülesanne 27. Tõestage, et iga naturaalarvu $n > 1$ korral arv $2^{2^n} + 1$ lõpeb numbriga 7.

Tõestus.