Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks, mille pikkuste suhe on $9:1$, ning vaadeldava kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille pindalade vahe on $48\ \mathrm{cm}^2$. Leia esialgse kolmnurga kaatetite pikkused.

2. Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõesta, et $a^2+b^2+c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4+b^4+c^4$ jagub 7-ga.

3. Rein lahendas matemaatika testi, mis koosnes algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimustest. Pärast tulemuste kontrollimist selgus, et algebraküsimustest oli Rein vastanud õigesti 50%, geomeetriaküsimustest 70% ja loogikaküsimustest 80%. Algebra- ja loogikaküsimustest kokku oli Rein õigesti vastanud 62%, geomeetria- ja loogikaküsimustest kokku aga 74%. Mitmele protsendile testi kõikidest küsimustest vastas Rein õigesti?

4. Leia kõik reaalarvude paarid (x,y), mis rahuldavad võrdust

$$(x+y)^2=(x+3)(y-3).$$

5. Kui palju leidub selliseid 10000-st väiksemaid positiivseid täisarve, mille kümnendesituses on paarisarv paarisnumbreid ja paaritu arv paarituid numbreid? (Eeldame, et ükski arv ei alga nulliga.)

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

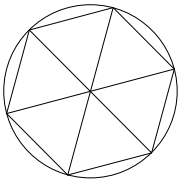
LÕPPVOOR

5. märts 2005

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Seitse venda ostsid ümmarguse pitsa ja lõikasid selle 12 tükiks nii, nagu joonisel näidatud. Kuuest vanemast vennast igaüks võttis endale ühe võrdkülgse kolmnurga kujulise tüki; ülejäänud 6 servatükki, mida vanemad vennad ei tahtnud, anti noorimale vennale. Kas noorim vend sai rohkem või vähem pitsat kui tema iga vanem vend?



2. Olgu a, b ja c sellised reaalarvud, et

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$

Tõesta, et

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

3. Kui palju leidub selliseid neljakohalisi 7-ga jaguvaid naturaalarve, mille esimese ja viimase numbri vahetamisel saame samuti neljakohalise 7-ga jaguva arvu?

4. Vii avaldis

$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$$

kujule, kus lubatavateks teheteks on ainult liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja ruutjuure leidmine.

5. Ruudustik mõõtmetega 5×5 kaetakse kaheksa nurgikuga (kolmest ühikruudust koosnev kujund joonisel) nii, et üks ruut jääb vabaks. Tee kindlaks kõik ruudustiku ruudud, mis võivad pärast katmist vabaks jääda.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Reaalarvud x ja y rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1. \end{cases}$$

   Tõesta, et $\cos 2x = \cos 2y$.

2. Täisarvud a, b ja n on sellised, et arv $a + b$ jagub arvuga n ning arv $a^2 + b^2$ jagub arvuga n^2. Tõesta, et arv $a^m + b^m$ jagub arvuga n^m suvalise positiivse täisarvu m korral.

3. Riigi postiteenistus kasutab postisaadetiste transpordiks kullereid, kellest igaühe ülesandeks on toimetada posti mingist linnast selle mingisse naaberlinna. On teada, et igast linnast on võimalik posti saata pealinna P. Suvalise kahe linna A ja B korral nimetame linna B *tähtsamaks* linnast A, kui saadetise iga võimalik tee linnast A pealinna P läbib kindlasti linna B.

   a) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna A, B ja C korral on B tähtsam A-st ja C tähtsam B-st, siis on ka C tähtsam A-st.

   b) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna A, B ja C korral on B ja C mõlemad tähtsamad A-st, siis on C tähtsam B-st või B tähtsam C-st.

4. Tasandil on antud kumer nelinurk $ABCD$. Olgu tasandi mingi punkti O korral K, L, M ja N vastavalt kolmnurkade AOB, BOC, COD ja DOA ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et tasandil leidub täpselt üks punkt O, mille puhul nelinurk $KLMN$ on rööpkülik.

5. Kas leidub selline täisarv $n > 1$, et arv

$$2^{2^n - 1} - 7$$

   ei ole ühegi täisarvu ruut?

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

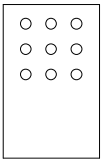
LÕPPVOOR

5. märts 2005

XII klass

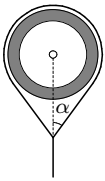
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Bussifirma busside piletikomposter lööb piletisse alati täpselt kuus auku. Aukude võimalikud asukohad paiknevad 3×3 tabelina, nagu näidatud joonisel. Hr. Jänes soovib hankida endale sellise piletite komplekti, et kompostri aukude ükskõik millise kombinatsiooni korral oleks tal olemas sama kombinatsiooniga pilet. Piletit võib vaadata nii eest- kui tagantpoolt. Leia vähim võimalik piletite arv niisuguses komplektis.



2. Tasandil on antud kumer n-nurk, kusjuures n on paaritu. Tõesta, et kui tasandil leidub punkt, millest vaadates kõik selle n-nurga küljed paistavad sama nurga all, siis see punkt on ainus. (Ütleme, et lõik AB paistab punktist O nurga γ all, kui $\angle AOB = \gamma$.)

3. Nöör, mille ühes otsas on väike silmus, pannakse üle horisontaalse toru nii, et otsad jäävad rippu. Teine ots pistetakse läbi silmuse, tõmmatakse torust eemale nii kaugele kui võimalik ja fikseeritakse selles asendis, kusjuures nöör ulatub endiselt silmusest läbi. Leia nurk α, mille võrra pöördub nööri käigusuund silmuse läbimisel.

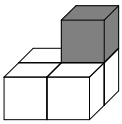


4. Naturaalarvude jada a_1, a_2, a_3, ... nimetatakse *perioodiliseks mooduli n järgi*, kui leidub selline positiivne täisarv k, et iga positiivse täisarvu i korral annavad liikmed a_i ja a_{i+k} arvuga n jagades sama jäägi. Kas leidub kasvav naturaalarvude jada, mis

   a) ei ole perioodiline lõpliku positiivse arvu naturaalarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline kõigi ülejäänud naturaalarvuliste moodulite järgi;

   b) ei ole perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi?

5. *Krümbel* on joonisel näidatud ruumiline kujund, mis koosneb neljast valgest ja ühest mustast ühikkuubist. Leia vähim kuubi küljepikkus, mille korral on kuupi võimalik täpselt krümblitega täita.



LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, отношение длин которых $9:1$, а рассматриваемый треугольник – на два треугольника, разность площадей которых 48 см^2. Найти длины катетов исходного треугольника.

2. Пусть a, b и c – произвольные целые числа. Доказать, что $a^2+b^2+c^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $a^4+b^4+c^4$ делится на 7.

3. Рома решал математический тест, который состоял из вопросов по алгебре, геометрии и логике. После проверки результатов выяснилось, что Рома ответил правильно на 50% вопросов по алгебре, на 70% вопросов по геометрии и на 80% вопросов по логике. Из вопросов по алгебре и по логике вместе Рома ответил верно на 62%, а из вопросов по геометрии и по логике вместе – на 74%. На сколько процентов всех вопросов теста Рома ответил правильно?

4. Найти все пары (x,y) действительных чисел, которые удовлетворяют равенству
$$(x+y)^2=(x+3)(y-3).$$

5. Сколько найдётся таких положительных целых чисел, меньших 10000, в десятичной записи которых чётное число чётных цифр и нечётное число нечётных цифр? (Предположим, что ни одно число не начинается с нуля.)

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

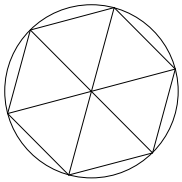
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Семеро братьев купили круглую пиццу и разрезали её на 12 частей так, как показано на рисунке. Каждый из шестерых старших братьев взял себе по куску в виде равностороннего треугольника; оставшиеся 6 краевых кусочков, которые старшие братья не захотели, отдали младшему брату. Получил ли младший брат больше или меньше пиццы, чем каждый его старший брат?



2. Пусть a, b и c – такие действительные числа, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$

Доказать, что

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

3. Сколько найдётся таких четырёхзначных чисел, делящихся на 7, при перестановке первой и последней цифры каждого из которых получается снова четырёхзначное число, делящееся на 7?

4. Привести выражение

$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$$

к виду, в котором разрешёнными операциями являются только сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня.

5. Клетчатую доску размером 5×5 накрывают восемью уголками (фигура на рисунке, состоящая из трёх едничных клеток) так, что одна клетка остаётся свободной. Определить все возможные клетки доски, которые могут остаться свободными после накрытия.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Действительные числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1. \end{cases}$$

Доказать, что $\cos 2x = \cos 2y$.

2. Целые числа a, b и n такие, что число $a+b$ делится на число n, а число a^2+b^2 делится на число n^2. Доказать, что a^m+b^m делится на n^m при любом положительном целом числе m.

3. Почтовая служба страны использует для транспортировки почтовых посылок курьеров, задачей каждого из которых является доставка почты из одного какого-то города в какой-то соседний ему город. Известно, что из каждого города можно отправить почту в столицу P. В случае любых городов A и B назовём город B *важнее* города A, если любой возможный путь посылки из города A в столицу P обязательно проходит через город B.

   а) Доказать, что всегда, когда для каких-то трёх различных городов A, B и C город B важнее города A, а город C важнее города B, то тогда и город C важнее города A.

   б) Доказать, что всегда, когда для каких-то трёх различных городов A, B и C города B и C оба важнее города A, то тогда либо C важнее чем B, либо B важнее чем C.

4. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть для какой-то точки O этой плоскости точки K, L, M, N являются соответственно центрами описанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA. Доказать, что на плоскости найдётся ровно одна точка O, при которой четырёхугольник $KLMN$ – параллелограмм.

5. Найдётся ли такое целое число $n > 1$, что число

$$2^{2^n-1} - 7$$

не является квадратом ни одного целого числа?

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

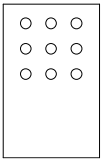
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

XII класс

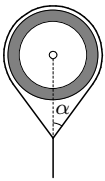
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Компостер в автобусах одной автобусной фирмы всегда пробивает в билете ровно шесть дырок. Возможные места дырок располагаются в виде таблицы 3×3 так, как показано на рисунке. Г-н Заяц желает собрать такой комплект билетов, что при любой комбинации дырок компостера у него имелся бы билет с такой же комбинацией. На билет можно смотреть как спереди, так и сзади. Найти наименьшее возможное число билетов в таком комплекте.



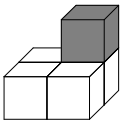
2. На плоскости дан выпуклый n-угольник, причём n нечётно. Доказать, что если на плоскости найдётся точка, из которой все стороны этого n-угольника видны под одним и тем же углом, то такая точка единственная. (Скажем, что отрезок AB виден из точки O под углом γ, если $\angle AOB = \gamma$.)

3. Верёвка, на одном конце которой есть маленькое колечко, вешают на горизонтальную трубу так, что концы остаются висеть. Второй конец продевают сквозь колечко, протягивают на максимальное возможное расстояние от трубы и фиксируют в таком положении, причём верёвка по-прежнему проходит сквозь колечко. Найти угол α, на который изменяется направление верёвки при прохождении колечка.



4. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... называется *периодичной по модулю* n, если найдётся такое положительное целое число k, что при любом положительном целом числе i члены a_i и a_{i+k} дают одинаковый остаток при делении на n. Найдётся ли возрастающая последовательность натуральных чисел, которая
   а) не является периодичной по конечному положительному числу натуральных модулей и является периодичной по всем остальным натуральным модулям;
   б) не является периодичной по бесконечному числу натуральных модулей и является периодичной по бесконечному числу натуральных модулей?

5. *Крюмбель* – это изображённая на рисунке объёмная фигура, состоящая из четырёх белых и одного чёрного единичных кубиков. Найти наименьшую длину ребра куба, при которой возможно в точности заполнить куб крюмбелями.



Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

Lahendused ja vastused

9. klass

1. *Vastus:* $6\sqrt{10}$ cm ja $2\sqrt{10}$ cm.

   Olgu ABC vaadeldav täisnurkne kolmnurk ja D hüpotenuusile tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 1). Leiame kõigepealt kolmnurga ABC pindala. Olgu S_1 kolmnurga ACD pindala ja S_2 kolmnurga CBD pindala. Et nendel kolmnurkadel on ühine kõrgus, siis suhtuvad nende pindalad samuti nagu alused. Järelikult $S_1 = 9S_2$. Teiselt poolt $S_1 - S_2 = 48$ cm^2. Siit $8S_2 = 48$ cm^2, millest $S_2 = 6$ cm^2 ja $S_1 = 9 \cdot 6 = 54$ cm^2. Kolmnurga ABC pindala on järelikult

$$S = S_1 + S_2 = 60 \text{ cm}^2.$$

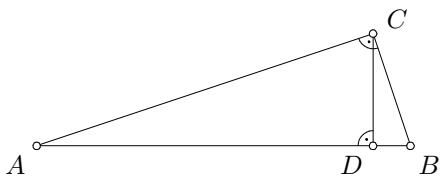
   Edasi, et kolmnurgad ACD ja ABC on sarnased, siis $\dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, millest $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$. Samuti on kolmnurgad CBD ja ABC sarnased, järelikult $\dfrac{|BC|}{|BD|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$, millest $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$. Seega

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|AB| \cdot |BD|} = \frac{|AD|}{|BD|} = 9$$

   ja

$$\frac{|AC|}{|BC|} = 3.$$

   Avaldame nüüd kolmnurga ABC pindala, kasutades täisnurkse kolmnurga pindala valemit. Selle põhjal $\dfrac{|AC| \cdot |BC|}{2} = 60$ cm^2. Asendades eelviimase



Joonis 1

valemi abil $|AC| = 3|BC|$, saame $3|BC|^2 = 2 \cdot 60\ \mathrm{cm}^2$ ehk $|BC|^2 = 40\ \mathrm{cm}^2$. Siit leiame $|BC| = 2\sqrt{10}$ cm ja $|AC| = 3 \cdot 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$ cm.

2. Paneme kirja kõik täisarvude jagamisel 7-ga tekkivad jäägid ja leiame igaühe korral, millise jäägi annab 7-ga jagamisel arvu ruut ja neljas aste:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^4	0	1	2	4	4	2	1

Kui arvude a, b ja c ruutude summa jagub 7-ga, siis peab ka ruutude jääkide summa jaguma 7-ga. See on võimalik ainult kahel juhul: jäägid on kas 0, 0, 0 või 1, 2, 4 mingis järjekorras. Arvude neljandate astmete jäägid on siis vastavalt 0, 0, 0 või 1, 4, 2. Kummalgi juhul jagub jääkide summa ja järelikult ka neljandate astmete endi summa 7-ga. Vastupidi, kui arvude a, b ja c neljandate astmete summa jagub 7-ga, siis saame nii neljandate astmete kui ka ruutude võimalikeks jääkideks 0, 0, 0 või 1, 2, 4, mistõttu ka ruutude summa jagub 7-ga.

Märkus. Lihtne on näha, et nelja ja enama arvu korral ülesande väide ei kehti. Olgu näiteks $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ja $d = 2$ (ning võimalikud ülejäänud arvud nullid või üldiselt mingid 7-ga jaguvad arvud). Siis $a^2+b^2+c^2+d^2 = 7$, aga $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 19$ ei jagu 7-ga.

3. *Vastus:* 65%.

Olgu a, g ja l vastavalt õigesti vastatud algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimuste arv ning A, G ja L vastavalt algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimuste koguarv testis. Ülesande tingimuste põhjal siis $a = 0{,}5A$, $g = 0{,}7G$, $l = 0{,}8L$, $a + l = 0{,}62(A + L)$, $g + l = 0{,}74(G + L)$. Eelviimases ja viimases võrduses asendame vasaku poole suurused eelmiste võrduste põhjal. Eelviimasest võrdusest saame $0{,}5A + 0{,}8L = 0{,}62A + 0{,}62L$ ehk $0{,}12A = 0{,}18L$, millest

$$A = 1{,}5L,$$

viimasest võrdusest saame $0{,}7G+0{,}8L = 0{,}74G+0{,}74L$ ehk $0{,}04G = 0{,}06L$, millest

$$G = 1{,}5L.$$

Nüüd

$$a + g + l = 0{,}5A + 0{,}7G + 0{,}8L = 0{,}75L + 1{,}05L + 0{,}8L = 2{,}6L$$

ning

$$A + G + L = 1{,}5L + 1{,}5L + L = 4L.$$

Õigete vastuste osakaal oli seega

$$\frac{a + g + l}{A + G + L} = \frac{2{,}6}{4} = 65\%.$$

4. *Vastus:* ainus selline paar on $(-3, 3)$.

Lahendus 1. Avame sulud, viime kõik liikmed ühele poole ja rühmitame, sellega võime antud võrduse kirjutada kujul

$$x^2 + x(y+3) + (y^2 - 3y + 9) = 0.$$

Saadud võrdust vaatleme ruutvõrrandina x-i suhtes. Selle ruutvõrrandi diskriminant on

$$D = (y+3)^2 - 4(y^2 - 3y + 9) = -3y^2 + 18y - 27 = -3(y-3)^2.$$

Et ruutvõrrandil leiduks reaalarvuline lahend (st arvu y jaoks leiduks sobiv arv x), peab olema $D \geqslant 0$, mis on võimalik ainult $y = 3$ korral. Siis aga omandab ülesande võrdus kuju $(x+3)^2 = 0$, millest $x = -3$.

Lahendus 2. Avame sulud ja viime kõik liikmed ühele poole:

$$x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 9 = 0.$$

Tulemuse pooli korrutame kahega ning rühmitame liikmed. Saame

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$

ehk

$$(x+y)^2 + (x+3)^2 + (y-3)^2 = 0.$$

Viimane võrdus kehtib parajasti siis, kui kehtivad võrdused $x + y = 0$, $x + 3 = 0$ ja $y - 3 = 0$ ehk parajasti juhul $x = -3$, $y = 3$.

5. *Vastus:* 455.

Et ülesande tingimustele vastav arv peab olema väiksem kui 10000 ning sisaldama kokku paaritut arvu numbreid, siis saab ta olla ainult ühe- või kolmekohaline. Ühekohalistest arvudest sobivad parajasti paaritud arvud, mida on 5 (need sisaldavad 0 paarisnumbrit ja 1 paaritu numbri). Kolmekohalisel ülesande tingimusi rahuldaval arvul peavad olema kas kõik 3 numbrit paaritud või 1 number paaritu ja 2 numbrit paaris. Esimesel juhul on meil iga paaritu numbri valikuks 5 võimalust, kusjuures numbreid saame valida üksteisest sõltumatult – seega on niisuguseid arve $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Teisel juhul vaatleme eraldi võimalusi, kus ainus paaritu number on arvus esimesel, teisel või kolmandal kohal. Kui paaritu number on arvus esimesel kohal, siis saame nii selle kui ka kummagi järgneva paarisnumbri üksteisest sõltumatult valida 5 viisil – seega on ka selliseid arve $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Kui paaritu number on arvus teisel või kolmandal kohal, siis on meil arvu esimese paarisnumbri valikuks 4 võimalust (sest arv ei alga 0-ga) ning kummagi järgneva numbri valikuks 5 võimalust, kusjuures numbrid saame jällegi valida üksteisest sõltumatult; kummalgi juhul on sobivaid arve $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Kokku on ülesande tingimustele vastavaid arve $5 + 125 + 125 + 100 + 100 = 455$.

10. klass

1. *Vastus:* noorim vend sai rohkem pitsat.

   Olgu pitsa raadius 1. Pitsa kogupindala on siis $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Kuuest vanemast vennast igaüks sai endale tüki, mis on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 1 ning pindalaga
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$
   Noorim vend sai 6 tükki kogupindalaga
$$S_2 = \pi - \frac{6\sqrt{3}}{4}.$$
   Siin on
$$\pi > 3{,}125 = \frac{25}{8} > \frac{7\sqrt{3}}{4},$$
   kus viimane võrratus järeldub võrratusest $25 > 2 \cdot 7\sqrt{3}$, mis on samaväärne võrratusega $25^2 > 14^2 \cdot 3$ ehk $625 > 588$. Järelikult
$$S_2 = \pi - \frac{6\sqrt{3}}{4} > \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} = S_1.$$

2. *Lahendus 1.* Korrutame antud võrduse pooli arvudega a, b ja c ning liidame saadud kolm võrdust. Tulemus on
$$\frac{a^2+ab+ac}{b+c} + \frac{b^2+bc+ba}{c+a} + \frac{c^2+ca+cb}{a+b} = a+b+c$$
   ehk
$$\frac{a^2}{b+c} + a \cdot \frac{b+c}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + b \cdot \frac{c+a}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + c \cdot \frac{a+b}{a+b} = a+b+c.$$
   Koondades kummaltki poolelt võrdsed liikmed, saamegi vajaliku võrduse
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

   Lahendus 2. Viime eelduse vasaku poole murrud ühisele nimetajale, saame
$$\frac{a(c+a)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = 1.$$
   Järelikult
$$a(c+a)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(c+a) = (b+c)(c+a)(a+b)$$

ehk pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0.$$

Samamoodi viime väite vasaku poole murrud ühisele nimetajale:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \\ = \frac{a^2(c+a)(a+b) + b^2(b+c)(a+b) + c^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Viimase murru lugejas avame sulud ning rühmitame liikmed, sellega teiseneb lugeja kujule

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc),$$

milles teine suluavaldis võrdub eespool saadud seose põhjal nulliga.

3. *Vastus:* 195.

Olgu $n = \overline{abcd}$ vaadeldav neljakohaline arv. Tähistades $\overline{bc} = x$, esitame selle arvu kujul $n = 1000a + 10x + d$. Arvu n esimese ja viimase numbri vahetamisel saame arvu $n' = \overline{dbca} = 1000d + 10x + a$. Et n ja n' on mõlemad neljakohalised, siis peab olema $a \neq 0$ ja $d \neq 0$. Et n ja n' jaguvad mõlemad 7-ga, siis jaguvad 7-ga ka arvud

$$n + n' = 1001(a+d) + 20x$$

ja

$$n - n' = 999(a-d).$$

Kuna 1001 jagub 7-ga ning arvud 20 ja 7 on ühistegurita, siis peab x jaguma 7-ga, kusjuures $0 \leqslant x \leqslant 99$. Seega on x üks arvudest 0, 7, 14, ..., 98, mida on kokku 15. Kuna arv 999 on 7-ga ühistegurita, siis peab $a - d$ jaguma 7-ga. Arvestades tingimusi $1 \leqslant a$, $d \leqslant 9$, näeme, et ainsad sobivad paarid (a, d) on $(1, 8)$, $(8, 1)$, $(2, 9)$, $(9, 2)$ ning (a, a), kus $1 \leqslant a \leqslant 9$ – kokku niisiis 13 võimalust. Et arvu x saame valida sõltumatult a ja d valikust, siis on võimalikke kandidaate arvu n kohale üldse $15 \cdot 13 = 195$. Kõik leitud arvud rahuldavad ülesande tingimusi, sest kui $10x$ ja $a - d$ jaguvad 7-ga, siis $1000a + 10x + d = 1001a - (a-d) + 10x$ jagub 7-ga.

4. *Vastus:* $2\sqrt{167} + 1$.

Lahendus 1. Eraldame kuupjuure all asuva avaldise kummastki liidetavast 167-ga jaguvad osad:

$$1342\sqrt{167} + 2005 = 1336\sqrt{167} + 2004 + 6\sqrt{167} + 1 = \\ = 8 \cdot 167\sqrt{167} + 12 \cdot 167 + 6\sqrt{167} + 1.$$

Tulemuse esitame kujul

$$1342\sqrt{167}+2005=(2\sqrt{167})^3+3\cdot(2\sqrt{167})^2+3\cdot(2\sqrt{167})+1=$$
$$=(2\sqrt{167}+1)^3.$$

Järelikult

$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}=2\sqrt{167}+1.$$

Lahendus 2. Otsime vastust kujul $a\sqrt{167}+b$, kus a ja b on täisarvud. Siis peab kehtima

$$(a\sqrt{167}+b)^3=1342\sqrt{167}+2005$$

ehk

$$167a^3\sqrt{167}+3\cdot 167a^2b+3ab^2\sqrt{167}+b^3=1342\sqrt{167}+2005.$$

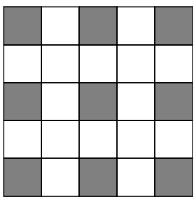
Järelikult peavad a ja b rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 167a^3+3ab^2=1342 \\ 501a^2b+b^3=2005. \end{cases}$$

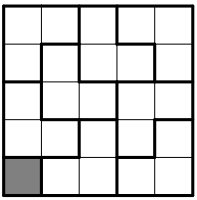
Süsteemi teise võrrandi võime esitada kujul $(501a^2+b^2)b=2005$. Et lahendit otsime eelduse kohaselt täisarvudes, siis peab $501a^2+b^2$ olema arvu 2005 selline tegur, mis on suurem kui 501 (ilmselt ei saa a ega b võrduda nulliga). Ainuke võimalus on seega $501a^2+b^2=2005$, $b=1$, kust $a=2$. Kontrollides näeme, et väärtused $a=2$, $b=1$ rahuldavad ka süsteemi esimest võrrandit. See tähendab, et $(2\sqrt{167}+1)^3=1342\sqrt{167}+2005$.

5. *Vastus:* vabaks võivad jääda joonisel 2 tumedaks värvitud ruudud.

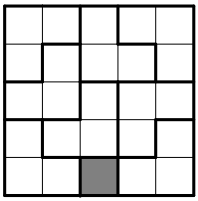
Oletame, et kõik värvitud ruudud on kaetud. Et üks nurgik ei saa katta kahte värvitud ruutu, siis tuleb kasutada vähemalt üheksat nurgikut, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Seega peab kindlasti üks nendest ruututudest vabaks jääma. On kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust: vaba ruut asub nurgas, külje keskel või ruudustiku keskel. Kuidas nendel kolmel juhul ruudustikku katta, on näidatud joonisel 3, 4 ja 5.



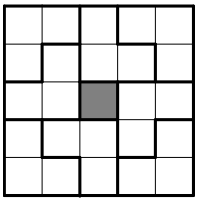
Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5

11. klass

1. *Lahendus 1.* Tõstame võrduste pooled ruutu, saame

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2 x + 2\cos x\sin y + \sin^2 y = 1.$$

Liidame tulemused, koondame seoste $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ ja $\sin^2 y+\cos^2 y = 1$ tõttu mõlemale poolele tekkivad liidetavad 2 ning jagame tulemust 2-ga. Sellega tekib võrdus

$$\sin x\cos y + \sin y\cos x = 0$$

ehk

$$\sin(x+y) = 0.$$

Järelikult $x + y = k\pi$, kus k on täisarv. Seetõttu $2x = 2k\pi - 2y$, millest $\cos 2x = \cos 2y$.

Lahendus 2. Esimesest võrdusest järeldub $\sin x \geqslant 0$ ja $\cos y \geqslant 0$, teisest võrdusest aga $\sin y \leqslant 0$ ja $\cos y \leqslant 0$. Järelikult saame antud võrrandisüsteemist süsteemi

$$\begin{cases} |\sin x| + |\cos y| = 1 \\ |\cos x| + |\sin y| = 1. \end{cases}$$

Tõstame võrrandite pooled ruutu ja liidame. Seejärel koondame mõlemalt poolelt arvu 2 ning jagame tulemust 2-ga. Sellega tekib võrrand

$$|\sin x| \cdot |\cos y| + |\cos x| \cdot |\sin y| = 0,$$

mis on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \cos x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

Kui esimeses võrrandis võrdub nulliga siinus, siis peab ka teises võrrandis võrduma nulliga siinus. Kahekordse nurga koosinuse valemi põhjal siis

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1,$$
$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 1.$$

Kui esimeses võrrandis võrdub nulliga koosinus, siis peab ka teises võrrandis võrduma nulliga koosinus, mistõttu

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1,$$
$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = -1.$$

Lahendus 3. Liidame võrrandid kokku:

$$\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = 0.$$

Kasutades siinuste summa ja koosinuste summa valemit, saame

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0,$$

millest

$$\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

Kui $\cos\frac{x-y}{2} = 0$, siis $\frac{x-y}{2} = (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$, millest $2x - 2y = (2k-1)\cdot 2\pi$. Järelikult $\cos 2x = \cos 2y$. Jääb analüüsida juht $\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} = 0$. Siit $\sin\frac{x+y}{2} = -\cos\frac{x+y}{2}$ ehk $\tan\frac{x+y}{2} = -1$, millest $\frac{x+y}{2} = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ja $x + y = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Seega $\cos y = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ehk $\sin x + \cos y = 0$, mis on vastuolus esimese võrrandiga.

Märkus. Lahendusest 2 nähtub, et antud tingimustel saavad $\cos 2x$ ja $\cos 2y$ omandada vaid väärtusi 1 ja -1. See tähendab, alati kas $x = k\pi$, $y = l\pi$ või $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, kus k ja l on täisarvud (täpsem analüüs näitab, et esimesel juhul peab olema k paaris ja l paaritu, teisel juhul aga k paaritu ja l paaris).

2. *Lahendus 1.* Tõestame, et a ja b jaguvad n-ga, ülesande väide järeldub sellest vahetult. Et

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2),$$

siis $2ab$ jagub n^2-ga. Vaatleme arvu n algteguriteks lahutuses suvalist algarvu p ning eeldame, et ta esineb seal astmes α. Arvu $2ab$ algteguriteks

lahutuses esineb algarv p seega vähemalt astmes 2α ning arvu ab algteguriteks lahutuses kindlasti vähemalt astmes $2\alpha - 1$. Järelikult peab üks arvudest a ja b sisaldama algtegurit p vähemalt astmes α. Et $a + b$ jagub n-ga ja seetõttu ka arvuga p^α, siis peab ka teine arvudest a ja b sisaldama algtegurit p vähemalt astmes α. Seega esinevad kõik arvu n algtegurid arvudes a ja b vähemalt sama suures astmes kui arvus n. See tähendab, et a ja b jaguvad n-ga.

Lahendus 2. Tõestame, et arvud a ja b jaguvad arvuga n. Kui n on paarisarv, siis peavad a ja b olema samuti paaris, sest kui a ja b oleksid paaritud, siis annaks a^2+b^2 jagamisel 4-ga jäägiks 2 ja ei jaguks seetõttu arvuga n^2. Jagame arve a, b ja n kõiki 2-ga, tekkivad arvud rahuldavad jälle ülesande eeldusi. Nii jätkates saame arvud a, b ja n esitada kujul $a = 2^k x$, $b = 2^k y$ ja $n = 2^k m$, kus m on paaritu arv ning lisaks $x + y$ jagub m-ga ja $x^2 + y^2$ jagub m^2-ga. Võrdusest

$$(x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x + y)^2$$

näeme, et $(x - y)^2$ jagub m^2-ga ehk $x - y$ jagub m-ga. Et ka $x + y$ jagub m-ga, siis $2x$ ja $2y$ jaguvad m-ga. Siit x ja y jaguvad m-ga, sest m on paaritu. Järelikult ka arvud $2^k x = a$ ja $2^k y = b$ jaguvad arvuga $2^k m = n$.

3. *Lahendus 1.* a) Olgu t suvaline võimalik saadetise teekond linnast A pealinna. Et B on A-st tähtsam, siis täbib t linna B. Teekonna t lõpuosa linnast B pealinna on saadetise võimalik teekond linnast B pealinna. Et C on B-st tähtsam, siis läbib see teekond linna C. Järelikult läbib teekond t linna C.

   b) Oletame, et väide ei kehti, st C ei ole tähtsam B-st ja B ei ole tähtsam C-st. Siis leidub tee linnast B pealinna, mis ei läbi linna C, ja tee linnast C pealinna, mis ei läbi linna B. Vaatleme nüüd mingit teed linnast A pealinna. Et linnad B ja C on eelduse põhjal linnast A tähtsamad, siis läbib see tee nii linna B kui ka linna C. Alustades liikumist linnast A seda teed mööda, jälgime, kumb linnadest B ja C tuleb ette esimesena. Kui esimesena jõuame linna B, siis liigume edasi pealinna mööda seda teed, mis ei läbi linna C. Sellega oleme leidnud tee linnast A pealinna, mis ei läbi linna C, see on vastuolus eeldusega, et C on A-st tähtsam. Kui esimesena jõuame linna C, siis saame analoogiliselt vastuolu eeldusega, et B on A-st tähtsam. Seega oli meie esialgne oletus väär.

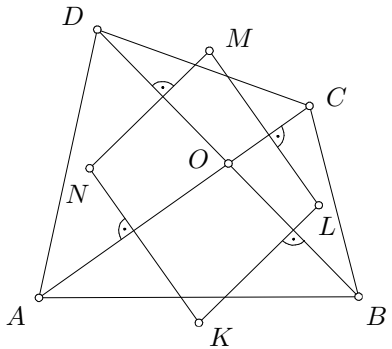
   Lahendus 2. a)-osa tõestame nagu lahenduses 1.

   b) Eelduse põhjal läbib iga postiteekond linnast A pealinna nii linna B kui ka linna C. Oletame kõigepealt, et leidub kaks teed linnast A pealinna, millest esimene läbib linna B enne linna C ja teine linna C enne linna B. Jättes teede kooseisust ära võimalikud tsüklilised ringkäigud, võime eeldada, et teed ei pöördu tagasi juba külastatud linnadesse. Nüüd aga saame

liikuda linnast A pealinna ilma vahepeal linna C läbimata: siirdume linnast A mööda esimest teed linna B ja edasi linnast B mööda teist teed pealinna. See on vastuolus eeldusega, et C on A-st tähtsam. Järelikult läbib iga teekond linnast A pealinna linnu B ja C samas järjekorras.

Üldisust kitsendamata eeldame, et kõik teed linnast A pealinna läbivad kõigepealt linna B ja seejärel linna C. Vaatleme suvalist teed linnast B pealinna. Kui oletada, et see tee ei läbi linna C, siis liidame tema algusesse teeosa linnast A linna B, mis samuti C-d ei läbi; see on võimalik, sest iga tee linnast A pealinna jõuab linna B varem kui linna C. Tulemuseks saame tee linnast A pealinna, mis C-d ei läbi. See on vastuolus tingimusega, et C on A-st tähtsam. Seega peab iga B-st lähtuv tee läbima linna C, st C on B-st tähtsam.

4. Kui O on ülesandes nimetatud omadusega punkt, siis peab kehtima seos $KL \perp BO$, sest punktid K ja L asuvad mõlemad lõigu BO keskristsirgel. Analoogiliselt $LM \perp CO$, $MN \perp DO$ ja $NK \perp AO$. Olgu nüüd O nelinurga diagonaalide lõikepunkt (joonis 6). Siis on nii KL kui ka MN risti sirgega BD, mis tähendab, et $KL \parallel MN$. Analoogiliselt saame $LM \parallel NK$. Järelikult on nelinurga $KLMN$ vastasküljed paralleelsed, st nelinurk on rööpkülik. Vastupidi, kui O on mingi punkt, mille korral nelinurk $KLMN$ on rööpkülik, siis kehtib $KL \parallel MN$. Seega ka $BO \parallel DO$, millest saame, et punkt O asub sirgel BD. Samamoodi näitame, et punkt O asub sigel AC ehk on nelinurga diagonaalide lõikepunkt.



Joonis 6

5. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Näitame, et juhul $n = 5$ valemist saadav arv $2^{31} - 7$ ei ole täisruut. Et $2^{10} = 1024$ annab 11-ga jagades jäägi 1, siis ka $2^{30} = (2^{10})^3$ annab 11-ga jagades jäägi 1 ja $2^{31} = 2 \cdot 2^{30}$ annab jäägi 2. Järelikult $2^{31} - 7$ annab 11-ga jagades jäägi $2 + 11 - 7 = 6$. Vaadates läbi arvude

kõikvõimalike kujude $11k$, $11k \pm 1$, $11k \pm 2$, $11k \pm 3$, $11k \pm 4$ ja $11k \pm 5$ ruudud, näeme, et need annavad 11-ga jagades vastavalt jäägid 0, 1, 4, 9, 5 ja 3. Seega ei saa ühegi arvu ruut anda 11-ga jagades jääki 6.

Lahendus 2. Arvutades saame $2^{31} - 7 = 32768 \cdot 65536 - 7 = 2147483641$, kuid $46340^2 = 2147395600$ ja $46341^2 = 46340^2 + 2 \cdot 46340 + 1 = 2147488281$. Seega $46340^2 < 2^{31} - 7 < 46341^2$, millest näeme, et $2^{31} - 7$ pole täisruut.

Märkus 1. Arv $n = 5$ on vähim selline, mille puhul ülesandes nimetatud arv ei ole täisruut, sest $2^3 - 7 = 1^2$, $2^7 - 7 = 11^2$ ja $2^{15} - 7 = 181^2$.

Märkus 2. Lahenduses 1 on 11 vähim arv, millega jagades arv $2^{2^n - 1} - 7$ annab täisruutude jääkidest erineva jäägi. On olemas ka teisi sobivaid arve, näiteks 31.

12. klass

1. *Vastus:* 47.

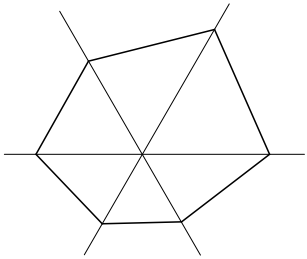
   Ilmselt võime aukude asemel vaadelda nn mitteauke, st sõlmi, kuhu komposter auku ei löö. Võimalusi valida 9 sõlmest välja 3 terveks jäävat on

   $$\binom{9}{3} = 84.$$

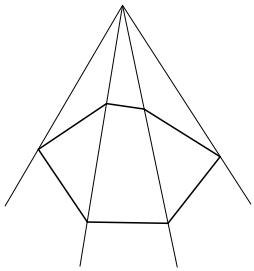
   Üks pilet võib esitada kas ühte kombinatsiooni, mis on sümmeetriline pileti pikitelje suhtes, või kahte erinevat kombinatsiooni, mis on selle telje suhtes teineteise peegelpildid. Sümmeetriliste kombinatsioonide korral peavad olema kas kõik kolm tervet kohta teises veerus (1 võimalus) või üks teises ning ülejäänud kaks samades ridades esimeses ja kolmandas veerus ($3 \cdot 3 = 9$ võimalust). Sümmeetrilisi augukombinatsioone on seega $1 + 9 = 10$, mittesümmeetrilisi aga $84 - 10 = 74$. Pileteid nende võimaluste katmiseks kulub ühtekokku

   $$10 + \frac{74}{2} = 47.$$

2. Tõmbame ülesande tingimustes antud punktist kiired läbi hulknurga tippude. Vastavalt sellele, kas punkt asub hulknurga sise- või välispiirkonnas, on moodustuval kiirtekimbul kaks põhimõtteliselt erinevat võimalust: kiired jagavad võrdseteks nurkadeks kogu tasandi (joonis 7) või ainult ühe nurga (joonis 8). Teisel juhul asuks äärmistel kiirtel kummalgi üks hulknurga tipp ja kõigil vahepealsetel kaks, seega peaks hulknurgal olema paarisarv tippe. See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult peab ülesande tingimustele vastav punkt asuma vaadeldava hulknurga sisepiirkonnas.



Joonis 7

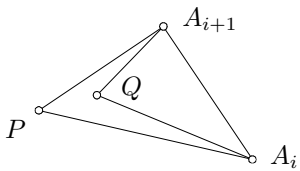


Joonis 8

Oletame nüüd, et hulknurga $A_1A_2\ldots A_n$ sees leidub kaks punkti P ja Q, millest vaadatuna paistavad kõik küljed sama nurga all. Siis peavad iga $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ korral kehtima seosed (siin loeme $A_{n+1} = A_1$)

$$\angle A_iPA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}, \qquad \angle A_iQA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}.$$

Et punktid P ja Q on erinevad, siis peavad leiduma hulknurga tipud A_i ja A_{i+1} nii, et punkt Q asub kolmnurga A_iPA_{i+1} sisepiirkonnas või küljel, aga mitte tipus P (joonis 9). Sel juhul aga $\angle A_iQA_{i+1} > \angle A_iPA_{i+1}$, vastuolu. Järelikult saab leiduda ainult üks nõutud omadustega punkt.

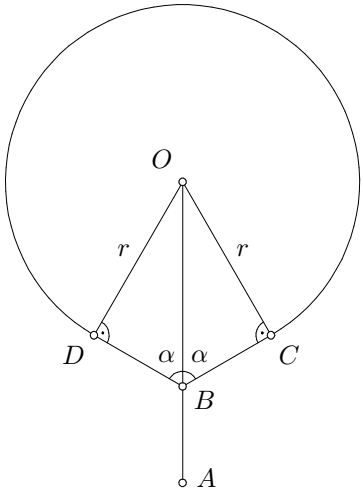


Joonis 9

Märkus. Kui tippude arv n on paaris, siis võib leiduda mitu ülesande tingimustele vastavat punkti. Näiteks ruudu (ja üldse rombi) kõik küljed paistavad sama nurga all kahte vastastippu läbiva sirge igast punktist, mis asub kujundist väljaspool. Suuremate tippude arvu n korral saab selliseid hulknurki konstrueerida kahe n-kiirelise kimbu abil, kusjuures üks neist on joonisel 7, teine aga joonisel 8 kujutatud tüüpi; kiirekimbud paigutada sobivasse asendisse, hulknurga tipud on ühe kimbu kiirte lõikepunktid neile vastavate kiirtega teisest kimbust.

3. *Vastus:* $\dfrac{\pi}{3}$.

Olgu O toru keskpunkt ja r toru raadius. Lisaks olgu l nööri pikkus, A ja B vastavalt nööri lahtine ja silmusega ots ning C ja D vastavalt esimene ja



Joonis 10

viimane puutepunkt toru pinnaga (joonis 10). Leiame kõigepealt lõigu AO pikkuse $d(\alpha)$. Ilmselt $|BC| = |BD| = r\cot\alpha$. Et $\angle COD = \pi - 2\alpha$, siis puutub nööriosa kaarel CD toru nurga $\pi + 2\alpha$ ulatuses ja tema pikkus on $r(\pi + 2\alpha)$. Lahutades nööri kogupikkusest lõikude BC ja BD ning kaare CD pikkused, saame

$$|AB| = l - 2r\cot\alpha - r(\pi + 2\alpha).$$

Samuti

$$|BO| = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Kokkuvõttes $d(\alpha) = |AB| + |BO|$ ehk

$$d(\alpha) = l - 2r\cot\alpha - r(\pi + 2\alpha) + \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Järgnevalt leiame, millise α korral on selle funktsiooni väärtus suurim. Funktsiooni tuletis on

$$d'(\alpha) = \frac{2r}{\sin^2\alpha} - 2r - \frac{r\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

ehk viies murrud ühisele nimetajale,

$$d'(\alpha) = r\left(\frac{2 - 2\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = r\left(\frac{2\cos^2\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right).$$

Tingimus $d'(\alpha) = 0$ annab võrrandi $2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$, millest $\cos\alpha = 0$ või $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Siit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ või $\alpha = \frac{\pi}{3}$, sest kindlasti $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Maksimumkoha määramiseks uurime tuletise $d'(\alpha)$ käitumist leitud punktide ümbruses. Murru nimetaja $\sin^2\alpha$ on vaadeldavas piirkonnas positiivne, murru lugeja $2\cos^2\alpha - \cos\alpha$ on aga ruutparabooli omadusi arvestades negatiivne parajasti siis, kui $0 < \cos\alpha < \frac{1}{2}$. Seega piirkonnas $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ on $d'(\alpha)$ positiivne ehk $d(\alpha)$ kasvab, piirkonnas $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ on $d'(\alpha)$ negatiivne ehk $d(\alpha)$ kahaneb. Järelikult omandab funktsioon maksimaalse väärtuse kohal $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

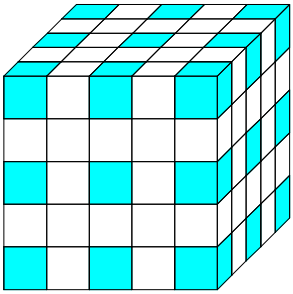
Märkus 1. On huvitav märkida, et maksimum ei realiseeru siis, kui sõlmkoht asub otse vastu toru. Nööri teise otsa kauguste erinevus juhul $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (maksimaalne kaugus) ja juhul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (sõlmkoht vastu toru) on 2,36% toru läbimõõdust.

Märkus 2. On võimalik leida nööri täpne vähim pikkus, mille korral ülesandes leitud optimaalne nurk realiseeruda saab. Nimelt, nööri pikkuse ja toru läbimõõdu suhe peab olema vähemalt $\frac{5\pi + 2\sqrt{3}}{6}$.

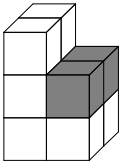
4. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Oletame, et jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on mitteperioodiline lõpliku arvu moodulite järgi, olgu N suurim nendest. Et $2N > N$, siis on vaadeldav jada perioodiline mooduli $2N$ järgi. Teisest küljest, kui liikmed a_i ja a_j annavad arvuga $2N$ jagades sama jäägi, siis ammugi annavad nad arvuga N jagades sama jäägi. Sellest järeldub, et jada on perioodiline ka mooduli N järgi, vastuolu.

b) Tõestame, et jada $a_i = 2^{i-1}$ ei ole perioodiline kõigi paarisarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline kõigi paarituarvuliste moodulite järgi. Olgu kõigepealt moodul N paarisarv. Kui jada oleks mooduli N järgi perioodiline, siis saame sarnaselt ülesande a)-osaga tõestada, et jada peab olema perioodiline mooduli iga teguri järgi. Ent mooduli 2 järgi saame jääkide jadaks $1, 0, 0, 0, \ldots$, mis pole perioodiline, seetõttu ei saa vaadeldav jada olla mooduli N järgi perioodiline. Olgu nüüd moodul N paaritu arv. Et võimalike jääkide arv jagamisel N-ga on lõplik, siis peavad mingid kaks jada liiget $a_i = 2^{i-1}$ ja $a_j = 2^{j-1}$, kus $i < j$, andma sama jäägi. Nende vahe $2^{j-1} - 2^{i-1} = 2^{i-1}(2^{j-i} - 1)$ jagub siis N-ga. Et N on paaritu, siis peab $2^{j-i} - 1$ jaguma N-ga. See tähendab, jada liikmed $a_1 = 1$ ja $a_{j-i+1} = 2^{j-i}$ annavad N-ga jagades sama jäägi ning järelikult annavad sama jäägi ka liikmed $a_2 = 2a_1$ ja $a_{j-i+2} = 2a_{j-i+1}$, liikmed $a_3 = 2a_2$ ja $a_{j-i+3} = 2a_{j-i+2}$ jne, st jada on perioodiline mooduli N järgi.



Joonis 11



Joonis 12

5. *Vastus:* 10.

   Et krümbel koosneb 5 ühikkuubist, siis peab kuubi ruumala ja seega ka küljepikkus jaguma 5-ga. Kuupi küljepikkusega 5 ei saa krümblitega täita. Selle tõestamiseks värvime kuubis joonisel 11 näidatud 27 ühikkuupi siniseks. Ühe krümbliga ei saa täita kahte sinist ühikkuupi, järelikult tuleks antud kuubi täitmiseks kasutada vähemalt 27 krümblit. Nende koguruumala $27 \cdot 5 = 135$ on aga suurem kuubi ruumalast $5^3 = 125$.

   Kuubi küljepikkusega 10 saab krümblitega täita. Selleks paneme kahest krümblist kokku joonisel 12 näidatud kujundi, kahest sellisest kujundist moodustame $2 \times 2 \times 5$ risttahuka, nendest omakorda saame aga koostada $10 \times 10 \times 10$ kuubi.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

Hindamisskeemid ja kommentaarid

9. klass

1. *(Elts Abel, Maksim Ivanov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Osakolmnurkade pindalade leidmine või kõrguse avaldamine hüpotenuusi lõikude abil: 3 p
   - Hüpotenuusi lõikude pikkuste leidmine: 2 p
   - Kaatetite pikkuste leidmine: 2 p

   Ülesanne näitas, et üldiselt tuntakse täisnurkse kolmnurga geomeetriat hästi.

2. *(Kaie Kubjas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Teisendused, mis ei vii sihile: 0 p
   - Lahendus eeldusel, et a, b ja c jaguvad 7-ga: 1 p
   - Peaaegu täislahendus, kuid vaatamata juht, kus a, b ja c jaguvad 7-ga: 6 p
   - Täislahendus: 7 p

   Ülesanne osutus lahendajatele erakordselt raskeks. Neile lahendajatele, kes tulid idee peale vaadata 7-ga jagamisel tekkivaid jääke, ei osutunud edasine ülesanne enam kuigi keeruliseks. Paljud proovisid teha erinevaid avaldiste teisendusi, mis kahjuks ei vii sihile ning tihtipeale olid ka ebakorrektsed.

3. *(Hannes Jukk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Ülesanne lahendatud erijuhul: 1 p
   - Õigesti leitud seos $A = G = 1{,}5L$ algebra, geomeetria ja loogika küsimuste arvude vahel, edasine lahendus puudub: 2 p
   - Eksitud algebra (geomeetria) ja loogika küsimuste arvude vahelise seose avaldamisel: $0{,}18L = 0{,}12A \Rightarrow A = 1{,}5L$. Muu lahendus läbi viidud korrektselt: 5 p
   - Eksitud teksti lugemisel – tekstist sai leida seose algebra ja loogika küsimuste arvude vahel, kuid õpilane koostas seose algebra ja geomeetria ülesannete arvude kohta. Muu lahendus läbi viidud korrektselt: 5 p

Väga palju oli täislahendusi. Mitmel õpilasel oli kahjuks probleeme võrdest tundmatu avaldamisega, nt $0{,}18L = 0{,}12A \Rightarrow A = 1{,}5L$.

4. *(Indrek Zolk)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Hindamisskeem 1.

   - Antud võrduse vaatlemine ruutvõrrandina x suhtes ja selle ruutvõrrandi diskriminandi leidmine: 4 p
   - Tähelepanek, et peab kehtima $D \geqslant 0$, ning järeldus, et $y = 3$: 2 p
   - Leidmine, et $x = -3$: 1 p

   Hindamisskeem 2.

   - Sedastamine, et $x + 3$ ja $y - 3$ on sama märgiga või mõlemad nullid: 1 p
   - Seose $(x + 3)^2 = (3 - y)(x + y)$ saamine: 2 p
   - Avaldiste $x + 3$ ja $y - 3$ ning $3 - y$ ja $x + y$ samamärgilisusest vastuolude tuletamine: 3 p
   - Lõppvastuse saamine: 1 p

   Tööd, kus oli saadud ainult vastus või vastusele lisaks toodud põhjendused olid mittekehtivad, said 1 punkti.

   Sihitute algebraliste teisenduste eest punkte ei antud.

   Suur hulk lahendajaid oli leidnud ainult sobiva arvupaari $(-3, 3)$, suutmata põhjendada, miks see on ainus. Täielike või peaaegu täielike lahenduste seas leidus nii mõlemat žürii poolt pakutud lahendust kui ka alternatiivne lahendusidee, mis on lühidalt jälgitav hindamisskeemis 2.

5. *(Uve Nummert)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Põhimõtteliselt vale lahendus, midagi õiges suunas edasiviivat ei ole tehtud: 0 p
   - Põhimõtteliselt vale lahendus, kuid esineb selgesti kirjapanduna mingi õige idee: 1 p
   - Olulised arvutusvead või vaatlemata jäetud juhud põhimõtteliselt õiges lahenduses: 2–4 p
   - Viga nulliga algavate arvude mahaarvestamisel, muidu korrektne lahendus: 5 p
   - Põhjendused ebapiisavad, muidu korrektne lahendus: 6 p
   - Korrektne lahendus: 7 p

Paljud lahendajad väitsid, et 0 ei ole ei paaris ega paaritu. Kui seda eeldust oli järjekindlalt rakendatud nii arvu kui ka numbri 0 korral ja ülesanne sel eeldusel korrektselt lahendatud (vastuseks tuli siis 960), siis sai 4 punkti; kui seejuures vaadeldi ainult numbrit 0 üldse mitte sisaldavaid arve (vastuseks tuli siis 240), siis sai 3 punkti.

Lahendused, kus paaris- ja paarituid numbreid loendati avaldises kujul $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1$, $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 1$ vms, said maksimaalselt 1 punkti.

10. klass

1. *(Jekaterina Prostakova, Anton Stalnuhhin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Osalised lahendused: 2 p
   - Ülesande lahenduse idee ja skeem on õiged, kuid viga pindalade arvutamisel: 4 p
   - Pindalad on leitud õigesti, kuid võrdlemise idee on vale: 5 p
   - Pindalad on leitud õigesti, võrdlemise idee on õige, kuid kasutatakse ligikaudseid hinnanguid: 6 p
   - Täiesti korrektne lahendus: 7 p

2. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Sisuline lahendus puudub: 0 p
   - Lahendust on ainult alustatud: 1 p
   - Lahendust on alustatud ja idee edasiseks on arusaadav: 2 p
   - Ainult näidatud, et $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$: 3 p
   - Näidatud, et $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$, ning edasine idee on arusaadav: 4 p
   - Korrektne tõestus: 7 p

3. *(Konstantin Tretjakov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Arvu esimese ja viimase numbri (a ja d) vahekorra uurimine: 1 p
   - Sobivate paaride (a, d) arvu leidmine: 1 p
   - Arvu keskmiste numbrite vahekorra uurimine ($\overline{bc}$ jagub 7-ga): 2 p
   - Sobivate paaride (b, c) arvu leidmine: 1 p
   - Õige vastus: 2 p

Kui oli otsitud ainult kujul $\overline{abca}$ olevate arvude arvu ja see ka õigesti leitud, sai 2 punkti.

4. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Idee esitada kuupjuure alune arv mingi avaldise kuubina: 1 p
   - Sulgude avamisest korrektse võrrandisüsteemi saamine: 2 p
   - Võrrandisüsteemi lahendamine ja lõppvastuse leidmine: 4 p

5. *(Emilia Käsper)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näitamine, kuidas üheksa ruudu korral ruudustik sobivalt katta: 2 p
   - Tõestus, et ülejäänud ruutude korral pole võimalik ruudustikku sobivalt katta: 5 p

11. klass

1. *(Martin Pettai)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Hindamisskeem 1 (žürii lahendus 1).
   - Mõlema võrrandi ruutu tõstmine: 2 p
   - Saadud võrrandite kokkuliitmine: 1 p
   - Võrduse $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ saamine: 1 p
   - Võrduse $\sin(x+y) = 0$ saamine: 1 p
   - Seose $x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ saamine: 1 p
   - Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

   Hindamisskeem 2 (žürii lahendus 3).
   - Seose $\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0$ saamine: 2 p
   - Juhu $\cos\frac{x-y}{2} = 0$ uurimine: 2 p

     Sealhulgas:
     - seose $\frac{x-y}{2} = (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$ saamine: *1 p*
     - võrduse $\cos 2x = \cos 2y$ järeldamine: *1 p*

- Juhu $\sin\frac{x+y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}=0$ uurimine: 3 p

  Sealhulgas:

  - seose $\tan\frac{x+y}{2}=-1$ saamine: *1 p*
  - seose $\frac{x+y}{2}=k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ saamine: *1 p*
  - vastuolu saamine: *1 p*

Hindamisskeem 3.

- Mõlema võrrandi ruututõstmine: 2 p
- Seose $\cos 2y-\cos 2x+2\sin(x-y)=0$ saamine: 2 p
- Võrduse $\sin(x-y)=0$ tõestamine: 3 p

2. *(Oleg Košik)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Lahendus induktsiooniga.

   - Näitamine, et $2ab$ jagub n^2-ga: 2 p
   - Põhjendamine, miks ka ab jagub n^2-ga: 3 p
   - Induktsiooniga näitamine, et ülesande väide kehtib: 2 p

   Lahendus, kus leitakse, et nii a kui ka b jaguvad n-ga.

   - Näitamine, et $2ab$ jagub n^2-ga 2 p
   - Järeldamine, et nii a kui ka b jaguvad n-ga: 4 p
   - Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

3. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Ülesande a-osa: 3 p
   - Ülesande b-osa: 4 p

   Ülesande a-osa oli enamasti lahendatud hästi, kuid b-osas kaotati tihti punkte, sest arutlused ei olnud küllalt ammendavad või tehti põhjendamata eeldusi. Norida võiks ka 7 punkti saanute arutluste kallal, aga leidsin, et kooliõpilaselt ei saagi niisuguses ülesandes päris laitmatu detailse lahenduse kirjutamist nõuda.

4. *(Oleg Petšonkin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Muidu õige lahendus, aga valesti selgitatud, miks KL ja BO on risti: 5 p
   - Õige ja täielik lahendus: 7 p

5. *(Kalle Kaarli)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Tuletatud ainult seos $2^{2^n-1} - 7$ ja $2^{2^{n+1}-1} - 7$ vahel: 1 p
   - Põhimõtteliselt õige, kuid halvasti vormistatud lahendus: 6 p
   - Igati korrektne lahendus: 7 p

12. klass

1. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Sümmeetriliste augukombinatsioonide arvu leidmine: 3 p
   - Tähelepanek, et igale mittesümmeetrilisele augukombinatsioonile vastav pilet sobib ka mingile teisele temast erinevale augukombinatsioonile: 1 p
   - Erinevate mittesümmeetriliste augukombinatsioonide arvu leidmine: 1 p
   - Õige vastus: 2 p

   Enamusele lahendajatest osutus ülesanne lihtsaks. Mõned lahendajad eksisid sümmeetriliste augukombinatsioonide kokkulugemisel.

2. *(Jan Villemson)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Tõestus, et paaritu n korral peab ülesande tingimustele vastav punkt asuma hulknurga sees: 3 p
   - Tõestus, et hulknurga sees leidub ülimalt üks ülesande tingimustele vastav punkt: 4 p

   Mitmes lahenduses kasutati väidet, et kõik punktid, millest antud lõik on näha antud nurga alt, asuvad ühel ringjoone kaarel. Niisugune väide pole õige, tegelikult moodustavad sellised punktid kahe kaare ühendi. Kui ülesande lahendus sellest väitest sõltus, võeti 1 punkt maha.

   Teine sage juht, kus muidu täielikust lahendusest 1 punkt kaduma läks, oli niisugune, kus lahendaja polnud põhjendanud, miks kahe erineva ülesande tingimustele vastava hulknurga sisepiirkonnas paikneva punkti korral peavad vastavad moodustuvad nurgad olema samad.

3. *(Mart Abel)* Seda ülesannet lahendati nii traditsiooniliste matemaatiliste vahenditega kui ka füüsikalise arutlusega (vaadeldes nöörile mõjuvaid jõude). Tüüpiliste lahenduste eest anti kummalgi juhul punkte järgmiselt.

   Matemaatiline lahendus.

- Ainult märgitud, et nurgad BDO ja BCO on täisnurgad: 1 p
- Leitud nurk, mille korral lõik AB on pikim: 3 p
- Muidu õige lahendus, kuid on näitamata, et $\frac{\pi}{3}$ on maksimumkoht: 6 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Füüsikaline lahendus.

- Toodud sisse sõlmepunktis mõjuvad jõud ning märgitud, et nende jõudude summa on 0: 3 p
- Toodud sisse sõlmepunktis mõjuvad jõud ning märgitud, et need jõud on kõik moodulilt võrdsed: 3 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Tulemust mitte mõjutavate arvutusvigade eest võeti maha 1 punkt.

4. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesande a-osa: 2 p

  Sealhulgas:

  - põhjendus, et sellest, et jada ei ole perioodiline mooduli n järgi, järeldub, et ta ei ole perioodiline ka mooduli kn järgi mistahes positiivse täisarvu k korral: *1 p*
  - selle asjaolu kasutamine a-osa väide tõestamiseks: *1 p*
- Ülesande b-osa: 5 p

  Sealhulgas:

  - sobiva jada leidmine: *1 p*
  - tõestus, et see jada ei ole perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi: *2 p*
  - tõestus, et see jada on perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi: *2 p*

Kui tõestuse mingis osas esines viga või puudus, siis sai selle osa eest 1 punkti vähem.

5. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Konstruktsioon, kuidas krümblitega täita kuupi küljepikkusega 10: 2 p
- Tõestus, et kuupi, mille küljepikkus ei jagu arvuga 5, ei ole võimalik krümblitega täita: 1 p

- Tõestus, et kuupi küljepikkusega 5 ei ole võimalik krümblitega täita: 4 p

Osad õpilased arvasid, et $5 \times 5 \times 5$ kuubi alumist kihti ei õnnestu krümblite abil täita. Paraku ei ole see ega ka mitmed analoogilised väited tõesed, ning seetõttu ei saa ka selle abil tõestada, et kuupi küljepikkusega 5 krümblitega täita ei saa.