Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

VII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia arvu $2 \cdot 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 14 + 14 \cdot 16 \cdot 18$ viimane number.

   . . . . . .

2. Tõmba ring ümber igale murrule, mis sobib $\frac{m}{n}$ asemel võrratusse

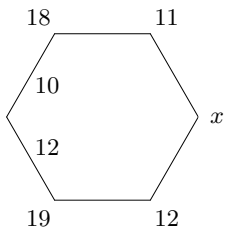
$$\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

   $\frac{19}{24}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}$

3. Leia naturaalarvude a ja b summa $a + b$ vähim võimalik väärtus, kui $3a \cdot 7b = 210$.

   . . . . . .

4. Kuusnurga igale küljele kirjutati üks arv ning igasse tippu selle kahel lähisküljel olevate arvude summa. Joonisel on säilinud ainult osa arve. Leia nende abil arv, mis oli kirjutatud x-i kohale.

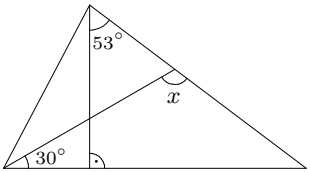


   . . . . . .

5. Reedel maksis 1 kg kooki 80 krooni. Laupäeval oli poes allahindlus 20%. Kui palju maksis laupäeval 200 g seda kooki?

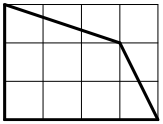
   . . . . . .

6. Leia nurga x suurus.



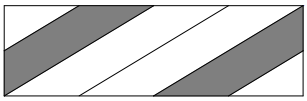
. . . . . .

7. Mitme väikese ruudu pindalaga on võrdne jämeda joonega piiratud nelinurga pindala?



. . . . . .

8. Ristküliku pikemad küljed on jaotatud neljaks võrdseks osaks ja lühemad küljed pooleks. Kui suur osa ristküliku pindalast on värvitud tumedaks?

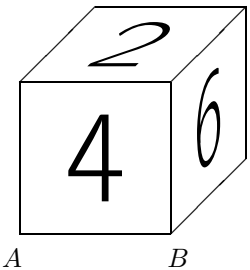


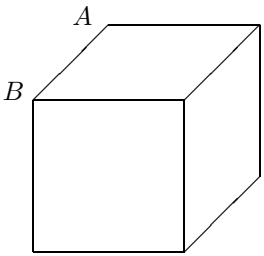
. . . . . .

9. Sektori nurga suurus on 30° ja selle sektori pindala on 3π cm^2. Leia kogu ringi pindala.

. . . . . .

10. Kuubi igale tahule on kirjutatud üks arvudest 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel paiknevate arvude summa on 7. Kuupi pööratakse nii, et tipud A ja B lähevad vasakul joonisel näidatud asendist paremal joonisel näidatud asendisse. Kanna parempoolsele joonisele kuubi nähtavatel tahkudel olevad arvud pärast pööramist.





Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

VIII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta: $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8} =$ .....

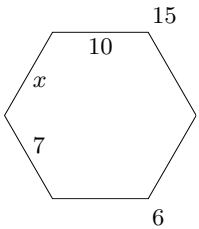
2. Olgu $x = -1$ ja $y = 1$. Tõmba ring ümber vähima väärtusega avaldisele (kui selliseid on mitu, siis kõigile neile).

$$x^2 + y^2 \qquad (y - x)^2 \qquad y^2 - 2yx + x^2 \qquad x^2 - y^2$$

3. Koolis on 1100 õpilast. Milline on suurim arv, mille puhul võime kindlalt väita, et koolis leidub alati nii mitu õpilast, kellel on samal päeval sünnipäev?

.....

4. Kuusnurga igale küljele kirjutati üks arv nii, et vastaskülgedel asuvate arvude summad olid võrdsed. Igasse tippu kirjutati selle kahel lähiskküljel olevate arvude summa. Joonisel on säilinud ainult osa arve. Leia nende abil arv, mis oli kirjutatud x-i kohale.

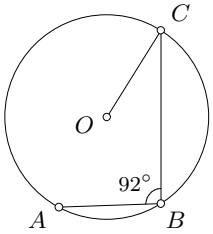


.....

5. Vanaema oli kudunud kolmveerandi salli pikkusest, kui selgus, et 10% juba kootud osast tuleb üles harutada. Mitu protsenti salli pikkusest jääb tal harutamise järel veel kududa?

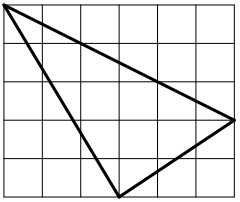
.....

6. Leia nurga OCB suurus, kui punktid A, B ja C asuvad ringjoonel keskpunktiga O ning $|AB| = |OC|$.



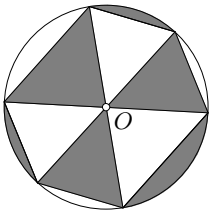
. . . . . .

7. Mitme väikese ruudu pindalaga on võrdne jämeda joonega piiratud kolmnurga pindala?



. . . . . .

8. Kui suur osa ringist on värvitud tumedaks, kui O on ringjoone keskpunkt?

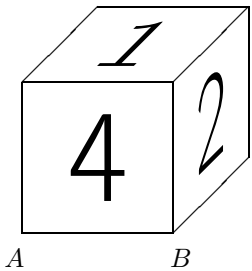


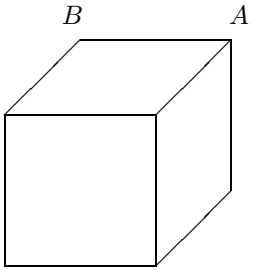
. . . . . .

9. Kogu ringi pindala on sektori pindalast 1,2 korda suurem. Leia sektori nurga suurus.

. . . . . .

10. Kuubi igale tahule on kirjutatud üks arvudest 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel paiknevate arvude summa on 7. Kuupi pööratakse nii, et tipud A ja B lähevad vasakul joonisel näidatud asendist paremal joonisel näidatud asendisse. Kanna parempoolsele joonisele kuubi nähtavatel tahkudel olevad arvud pärast pööramist.





Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

IX klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta: $\dfrac{2005^3 - 4 \cdot 2005}{2005^2 + 2 \cdot 2005} =$ .....

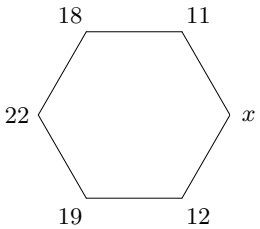
2. Olgu $x = -1$ ja $y = 1$. Tõmba ring ümber vähima väärtusega avaldisele (kui selliseid on mitu, siis kõigile neile).

   $y^3 - x^3$ $\qquad$ $(y - x)^3$ $\qquad$ $y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3$ $\qquad$ $y^3 + x^3$

3. Leia nii suurim kui ka vähim arv selliste kolmekohaliste arvude seast, mis jaguvad arvuga 9 ja mille numbriteks on kolm järjestikust naturaalarvu mingis järjekorras.

   ..... ja .....

4. Kuusnurga igale küljele kirjutati üks arv ning igasse tippu selle kahel lähisküljel olevate arvude summa. Joonisel on säilinud ainult osa arve. Leia nende abil arv, mis oli kirjutatud x-i kohale.

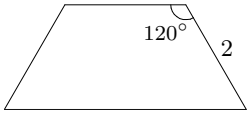


   .....

5. Telesaade lõppes kell 16.00. Kui reklaamipause, mis moodustasid 20% saate ajast, poleks olnud, siis oleks saade lõppenud kell 15.30. Mis kell saade algas?

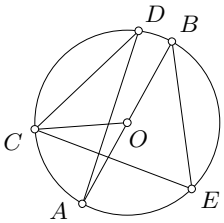
   .....

6. Võrdhaarse trapetsi ühe nurga suurus on 120° ning haara pikkus on 2. Trapetsi nürinurga poolitaja poolitab pikema aluse. Leia trapetsi aluste pikkused.



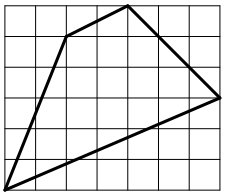
..... ja .....

7. Ringjoonel keskpunktiga O ja diameetriga AB on valitud punktid C, D ja E, nagu joonisel näidatud. Leia nurkade CDA ja BEC suuruste summa.



.....

8. Mitme väikese ruudu pindalaga on võrdne jämeda joonega piiratud nelinurga pindala?

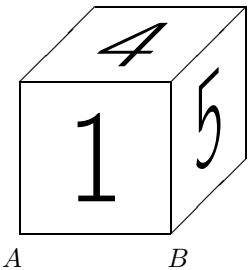


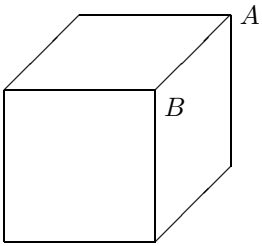
.....

9. Mõisted *rööpkülik*, *romb*, *ristkülik* ja *ruut* on mingis järjekorras tähistatud tähtedega A, B, C ja D. Leia, millist mõistet tähistab iga täht, kui järgmised kolm väidet on kõik õiged:
   a) A on D, mille küljed on võrdsed;
   b) D on C, mille nurgad on võrdsed;
   c) B on C, mille küljed on võrdsed.

A: ..... B: ..... C: ..... D: .....

10. Kuubi igale tahule on kirjutatud üks arvudest 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel paiknevate arvude summa on 7. Kuupi pööratakse nii, et tipud A ja B lähevad vasakul joonisel näidatud asendist paremal joonisel näidatud asendisse. Kanna parempoolsele joonisele kuubi nähtavatel tahkudel olevad arvud pärast pööramist.





Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

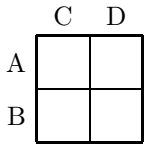
15. jaanuar 2005

VII klass

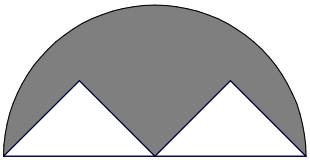
II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kirjuta igasse ruutu üks number nii, et tekkivad kahekohalised arvud ei alga nulliga ja rahuldavad järgnevaid tingimusi. Selgita, millises järjekorras ruute täitsid. Põhjenda, miks muid võimalusi pole.

   Paremale.
   A. Arvu 3 kordne.
   B. Algarvu kolmekordne.
   Alla.
   C. Arvu 25 kordne.
   D. Naturaalarvu ruut.



2. Poolringi diameetrile on joonestatud kaks võrdset võrdhaarset täisnurkset kolmnurka. Leia tumedaks värvitud osa pindala, kui poolringi diameeter on 14 cm.



3. Andre sai kingituseks viis tühja hoiukarpi. Iga päev valib ta välja kaks erinevat karpi ja laseb kummassegi korraga ühe ühekroonise mündi. Kas sel viisil münte kogudes on võimalik, et teatud aja pärast on igas hoiukarbis täpselt

   a) neli münti;

   b) seitse münti?

   Jaatava vastuse korral näita, kuidas tuleks tegutseda; eitavat vastust põhjenda.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

VIII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

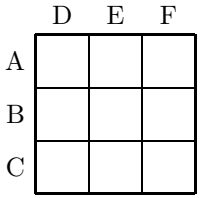
1. Kirjuta igasse ruutu üks number nii, et tekkivad kolmekohalised arvud ei alga nulliga ja rahuldavad järgnevaid tingimusi. Selgita, millises järjekorras ruute täitsid. Põhjenda, miks muid võimalusi pole.

   Paremale.

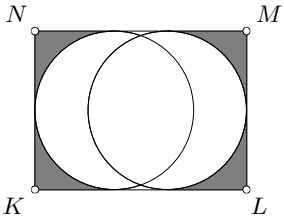
   A. Naturaalarvu ruut, mis jagub arvuga 5.
   B. Arvudega 5 ja 6 jaguv arv.
   C. Arv, mille kõik numbrid on paaritud ja mille numbrite summa on 11.

   Alla.

   D. Arvu 2005 ainsast kolmekohalisest tegurist 222 võrra suurem arv.
   E. Arv, milles on kaks paarisnumbrit ja mis jagamisel arvuga 4 annab jäägi 1.
   F. Arvuga 3 jaguv arv.



2. Ristkülikusse $KLMN$ on joonestatud kaks ristküliku külgi puutuvat ringjoont. Leia nelja tumedaks värvitud osa pindalade summa, kui $|KL| = 12$ cm ning ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus on kolmandik külje KN pikkusest.



3. Basseinis on 8 vee väljalaskeklappi. Süsteemi abil on võimalik valida täpselt 4 klappi ja muuta nende asend vastupidiseks (avatud klapp sulgub, suletud klapp avaneb). Kas selle süsteemi korduval rakendamisel on võimalik avada kõik klapid, kui esialgu on avatud:

   a) üks klapp;
   b) kaks klappi?

   Jaatava vastuse korral näita, kuidas tuleks tegutseda; eitavat vastust põhjenda.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

IX klass

II osa: Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Karlssonil ja Väikevennal oli kõht tühi ning nad sõid kahekesi ära Majasoku lihapallid. Pärast seda oli neil mõlemal kõht täis. On teada, et täis kõhuga Väikevend on raskem tühja kõhuga Karlssonist, täis kõhuga Karlsson aga on täpselt kaks korda raskem tühja kõhuga Väikevennast. Kumb kaalus rohkem, kas tühja kõhuga Väikevend või Majasoku lihapallid?

2. Viki valis mingi kolmekohalise arvu ja kirjutas üles kõik 23 jääki, mis tekkisid selle arvu jagamisel arvudega $8, 9, \ldots, 30$. Kas on võimalik, et nende jääkide hulgas esineb jääk 7

   a) vähemalt kaheksa korda;

   b) vähemalt kümme korda?

3. Tasandile joonestatakse kaks ringjoont ning kummagi keskpunktist tõmmatakse teisele ringjoonele puutuja. Tõesta, et kui lõigud, mis ühendavad ühe ringjoone keskpunkti teisel ringjoonel asuva puutepunktiga, on võrdse pikkusega, siis on võrdsed ka ringjoonte raadiused.

4. Antud on 2005 täisarvu. Võlur Merlin mängib järgmist mängu. Käigu tegemiseks valib ta välja mingid 7 arvu ning iga valitud arvu (sõltumata teistest valitud arvudest) kas suurendab 1 võrra või korrutab arvuga -1. Tõesta, et lõpliku arvu selliste käikudega saab Merlin muuta kõik 2005 arvu nullideks.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvud, mille ruutjuur on arvust endast täpselt 1 võrra väiksem.

2. Lihtsusta avaldis $2(a+b)^{-1}+(a+c)^{-1}-3(b+c)^{-1}$, kui on teada, et arvud a, b ja c on positiivsed ning $b^2+2c^2=3a^2$.

3. Koolimajale paigaldati n tähest koosnev neoonreklaam, mille esimene täht on K, sellele järgneb $n-2$ tähte O ning viimane täht on L. Reklaami töötsüklis kestab iga faas ühe sekundi. Esimesel sekundil ei põle ükski täht; seejärel süttib K; seejärel süttib K-le järgnev O; seejärel järgmine O jne, kuni lõpuks põlevad kõik tähed; seejärel kustub L, siis viimane O, siis eelviimane O jne, kuni viimasel sekundil põleb ainult K. Kui palju maksab reklaami üks töötsükkel, kui ühe tähe põlemine ühe sekundi jooksul maksab 1 sendi?

4. Üheksakohalise naturaalarvu numbrite hulgas esineb vähemalt üks 7, vähemalt üks 3 ning vähemalt üks 8. Kui sellest arvust kustutada kõik numbrid 7, siis jääb järele 38-ga jaguv arv; kui kustutada kõik numbrid 3, siis jääb järele 78-ga jaguv arv; kui aga kustutada kõik numbrid 8, siis jääb järele 73-ga jaguv arv.
   a) Leia üks selline arv, mis koosneb ainult numbritest 7, 3 ja 8.
   b) Leia üks selline arv, mille numbrite hulgas on täpselt üks 7, täpselt üks 3 ja täpselt üks 8 ning mis ei sisalda numbrit 0.

5. Ringjoonel keskpunktiga O võetakse punktid A, B ja C. Olgu punktid D, E ja F vastavalt lõikude OA, OB ja OC keskpunktid ning G ja H vastavalt lõikude DE ja EF keskpunktid. Tõesta, et punktid O, G, E ja H asuvad ühel ringjoonel.

6. Klassi õpilastest igale poisile meeldib vähemalt üks klassiõde ja igale tüdrukule vähemalt üks klassivend. On teada, et kui mingite õpilaste A, B, C, D korral A-le meeldib B, B-le C ja C-le D, siis meeldib A-le ka D.
   a) Tõesta, et klassis leiduvad poiss ja tüdruk, kes meeldivad teineteisele.
   b) Kas võib väita, et klassis leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele?

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Sirge $y = ax + b$ läbib punkte $(a; b+1)$ ja $(b-1; a)$. Leia a ja b väärtused.

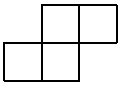
2. Kolmnurga ABC nurgad α ja β on sellised, et $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 2$ ja $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$. Leia selle kolmnurga pindala, kui nurga α vastaskülje pikkus on 30 cm.

3. Alates 2001. a. on Juku iga aasta 31. detsembril lugenud kokku kõik oma aasta jooksul saadud hinded. Nende aastatega on Juku õppeedukus tunduvalt paranenud: igal järgmisel aastal on tal olnud 20% vähem kahtesid ja kolmandiku võrra rohkem viisi kui eelmisel aastal. Seejuures oli tal 2003. a. esmakordselt viisi rohkem kui kahtesid. On teada, et ühelgi aastal ei saanud Juku üle 300 hinde. Tõesta, et 2004. a. oli Jukul viisi täpselt kaks korda rohkem kui kahtesid.

4. Naturaalarvul n leiduvad sellised erinevad positiivsed tegurid a ja b, et kehtib võrdus $(a-5)(b+1) = n-5$. Tõesta, et $5n$ on mingi täisarvu ruut.

5. Kolmnurga ABC ümberringjoone kaarel, millele toetub nurk ABC, valitakse punkt D. Nurga ACD poolitaja lõikab kolmnurga ümberringjoont teist korda punktis E. Olgu X lõikude BE ja AC lõikepunkt. Tõesta, et kui $|XA| = |XB|$, siis nelinurk $BCDE$ on võrdhaarne trapets või ristkülik.

6. Ema ostis poest šokolaaditahvli mõõtmetega 2×2005. Ats ja Pets otsustasid mängida järgmist mängu. Igal käigul tohib Ats valida endale (murda uue või võtta olemasoleva) ühest ruudust koosneva tüki, Pets aga joonisel näidatud neljaruudulise tüki (joonist peegeldada ei tohi). Kui Pets enam ühtegi tükki võtta ei saa, siis jäävad kõik järelejäänud tükid Atsile. Käike tehakse kordamööda, alustab Ats. Kumb saab parima mängustrateegia korral rohkem šokolaadi?



Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Aritmeetilise jada kuues liige on võrdne esimese viie liikme summaga ning üheteistkümnes liige on 1. Leia selle jada esimene liige.

2. Leia kõik niisugused reaalarvude paarid (a, b), mille korral funktsiooni $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tuletise graafik lõikab x-telge kahel erineval kohal $x = a$ ja $x = b$.

3. Gümnaasiumis õpib teatud arv õpilasi. Pärast esimest veerandit olid mõned õpilastest viielised, mõned neljalised ja ülejäänud kolmelised. Pärast teist veerandit jäi senistest viielistest õpilastest ikka viielisteks 85%, ülejäänutest said neljalised, senistest neljalistest jäi neljalisteks 80%, ülejäänutest said kolmelised ning senistest kolmelistest jäid kolmelisteks kõik peale Juku, kellest sai kahemees. Osutus, et nüüd oli gümnaasiumis viielisi, neljalisi ja kolmelisi õpilasi ühepalju. Leia vähim võimalik õpilaste arv gümnaasiumis.

4. Positiivsel täisarvul n leiduvad sellised positiivsed tegurid a ja b, et kehtib võrdus $(a-2)(b+1) = n$. Tõesta, et $2n+1$ on mingi täisarvu ruut.

5. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis D. Lisaks läbib punkti D veel kaks sirget: küljega AB paralleelne sirge, mis lõikab külge AC punktis E, ning küljega AC paralleelne sirge, mis lõikab külge AB punktis F. Tõesta, et

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$

6. Papa Carlo arvutis kehtib tingimus, et kasutaja parool peab koosnema 5 väiketähest. Turvalisuse huvides asendab papa Carlo selle uue tingimusega, et parool peab koosnema 4 väiketähest ja 1 erisümbolist (kasutaja valitud järjekorras). Buratino on selle arvuti kasutaja. Seni tundis Buratino ainult 30 väiketähte. Milline on vähim arv erisümboleid, mille ta peab selgeks õppima, et uue korra kohaselt oleks tal parooli valimiseks senisest rohkem võimalusi?

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти последнюю цифру числа $2 \cdot 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 14 + 14 \cdot 16 \cdot 18$.

   . . . . . .

2. Обвести каждую дробь, которой можно заменить $\dfrac{m}{n}$ в неравенстве

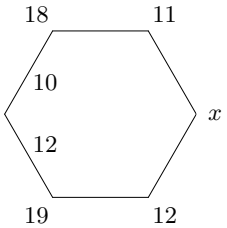
$$\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

   $\dfrac{19}{24}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{7}{8}$

3. Найти наименьшее возможное значение суммы $a+b$ натуральных чисел a и b, если $3a \cdot 7b = 210$.

   . . . . . .

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число, а в каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

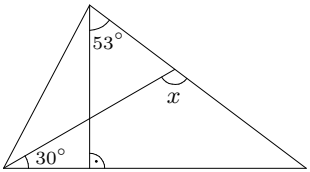


   . . . . . .

5. В пятницу 1 кг пирога стоил 80 крон. В субботу в магазине была скидка 20%. Сколько стоило 200 г этого пирога в субботу?

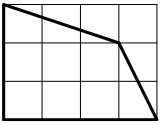
   . . . . . .

6. Найти величину угла x.



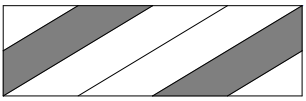
. . . . . .

7. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь четырёхугольника, ограниченного жирной линией?



. . . . . .

8. Большие стороны прямоугольника поделены на 4 равные части, а меньшие пополам. Какая часть площади прямоугольника закрашена тёмным цветом?

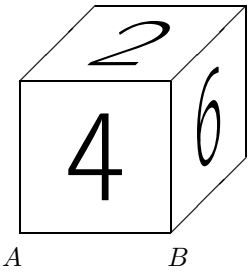


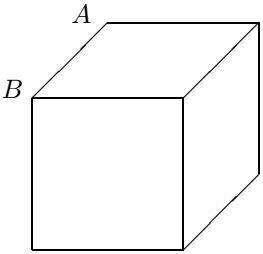
. . . . . .

9. Угол сектора равен 30°, а площадь этого сектора 3π см^2. Найти площадь всего круга.

. . . . . .

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.





LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VIII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить: $\dfrac{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8}=$ .....

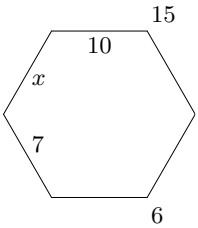
2. Пусть $x=-1$ и $y=1$. Обвести выражение с наименьшим значением (если таковых несколько, то все такие выражения).

$$x^2+y^2 \qquad (y-x)^2 \qquad y^2-2yx+x^2 \qquad x^2-y^2$$

3. В школе 1100 учеников. Чему равно наибольшее число, про которое можно утверждать, что в школе обязательно найдётся столько учеников, у которых день рождения в один и тот же день?

.....

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число так, что суммы чисел, находящихся на противоположных стронах, равны. В каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

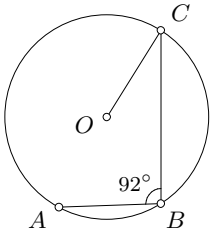


.....

5. Бабушка связала три четверти длины шарфа, когда выяснилось, что 10% уже связанной части придётся распустить. Сколько процентов длины шарфа останется ей связать после распускания?

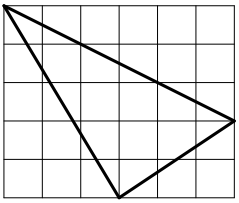
.....

6. Найти величину угла OCB, если точки A, B и C расположены на окружности с центром O, а $|AB| = |OC|$.



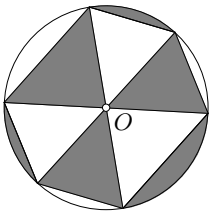
. . . . . .

7. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь треугольника, ограниченного жирной линией?



. . . . . .

8. Какая часть круга закрашена тёмным цветом, если O является центром окружности?

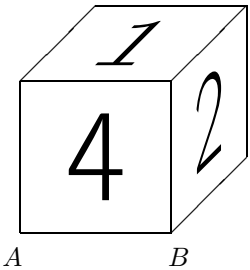


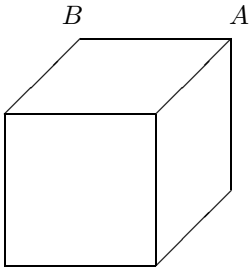
. . . . . .

9. Площадь всего круга в 1,2 раза больше площади сектора. Найти величину угла сектора.

. . . . . .

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.





LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

IX класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить: $\dfrac{2005^3 - 4 \cdot 2005}{2005^2 + 2 \cdot 2005} =$ .....

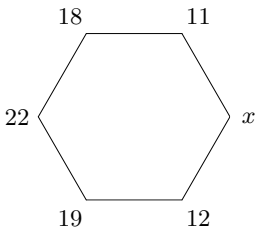
2. Пусть $x = -1$ и $y = 1$. Обвести выражение с наименьшим значением (если таковых несколько, то все такие выражения).

   $y^3 - x^3$ $\qquad$ $(y - x)^3$ $\qquad$ $y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3$ $\qquad$ $y^3 + x^3$

3. Найти как наибольшее, так и наименьшее число среди трёхзначных чисел, которые делятся на 9, и цифрами которого являются три последовательных натуральных числа в каком-то порядке.

   ..... и .....

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число, а в каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

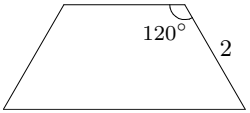


   .....

5. Телепередача закончилась в 16.00. Если бы не было рекламных пауз, которые составляли 20% от времени передачи, то передача закончилась бы в 15.30. Во сколько началась передача?

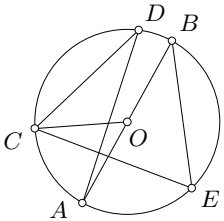
   .....

6. Один из углов равнобедренной трапеции равен 120°, а длина бокового ребра равна 2. Биссектриса тупого угла трапеции делит большее основание пополам. Найти длины оснований трапеции.



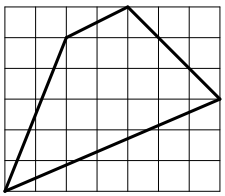
..... и .....

7. На окружности с центром O и диаметром AB выбраны точки C, D и E, как показано на рисунке. Найти сумму величин углов CDA и BEC.



.....

8. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь четырёхугольника, ограниченного жирной линией?



.....

9. Понятия *параллелограмм*, *ромб*, *прямоугольник* и *квадрат* обозначены в каком-то порядке буквами A, B, C и D. Найти, какое понятие обозначает каждая буква, если все три следующих утверждения верны:

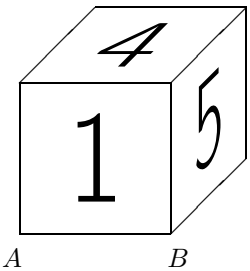
   а) A – это D, стороны которого равны;

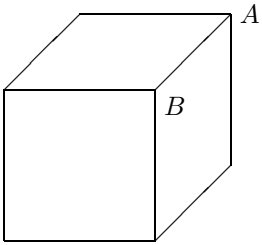
   б) D – это C, углы которого равны;

   в) B – это C, стороны которого равны.

A: ..... B: ..... C: ..... D: .....

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.





LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать в каждую клетку одну цифру так, чтобы получившиеся двузначные числа не начинались с нуля и удовлетворяли приведённым далее условиям. Пояснить, в каком порядке заполнялись клетки. Обосновать, почему нет других возможностей.

   Вправо.

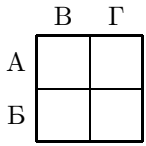
   А. Кратное числу 3.

   Б. Трёхкратное простого числа.

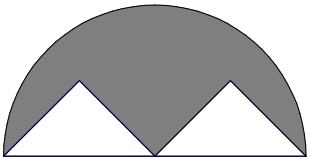
   Вниз.

   В. Кратное числу 25.

   Г. Квадрат натурального числа.



2. На диаметре полукруга построены два равных равнобедренных прямоугольных треугольника. Найти площадь части, закрашенной тёмным цветом, если диаметр полукруга равен 14 см.



3. Андре получил в подарок 5 пустых копилок. Каждый день он выбирает две разные копилки и в каждую одновременно опускает по одной однокроновой монете. Если таким образом собирать монеты, то возможно ли, что через некоторое время в каждой копилке окажется ровно

   а) четыре монеты;

   б) семь монет?

   В случае утвердительного ответа показать, каким образом следует действовать; отрицательный ответ обосновать.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VIII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать в каждую клетку одну цифру так, чтобы получившиеся трёхзначные числа не начинались с нуля и удовлетворяли приведённым далее условиям. Пояснить, в каком порядке заполнялись клетки. Обосновать, почему нет других возможностей.

   Вправо.

   А. Делящийся на 5 квадрат натурального числа.

   Б. Число, делящееся на 5 и 6.

   В. Число, все цифры которого нечётные, и сумма цифр которого равна 11.

   Вниз.

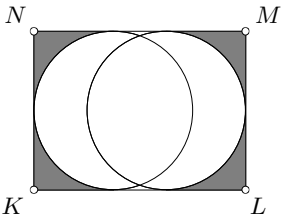
   Г. Число, которое на 222 больше единственного трёхзначного делителя числа 2005.

   Д. Число, две цифры которого чётные, и которое при делении на 4 даёт остаток 1.

   Е. Число, делящееся на 3.

	Г	Д	Е
А			
Б			
В			

2. В прямоугольник $KLMN$ вписаны две окружности, касающиеся сторон прямоуголника. Найти сумму площадей четырёх закрашенных тёмным цветом частей, если $|KL| = 12$ см, а расстояние между центрами окружностей составляет треть длины стороны KN.



3. В бассейне 8 клапанов для слива воды. При помощи системы можно выбрать ровно 4 клапана и изменить их состояние на противоположное (открытый клапан закрывается, закрытый открывается). Можно ли открыть все клапаны, применив эту систему несколько раз, если изначально открыт

   а) один клапан;

   б) два клапана?

   В случае утвердительного ответа показать, каким образом следует действовать; отрицательный ответ обосновать.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

IX класс

II часть: Время, отводимое для решения: 4 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Малыш и Карлсон были голодными, поэтому они вдвоём съели тефтельки Фрекен Бок. После этого они оба стали сытыми. Известно, что сытый Малыш тяжелее голодного Карлсона, а сытый Карлсон ровно в два раза тяжелее голодного Малыша. Чей вес больше, голодного Малыша или тефтелек Фрекен Бок?

2. Вика выбрала некоторое трёхзначное число и записала все 23 остатка, которые образуются при делении этого числа на $8, 9, \ldots, 30$. Возможно ли, что среди этих остатков остаток 7 встречается

   а) по меньшей мере 8 раз;

   б) по меньшей мере 10 раз?

3. На плоскости строится две окружности, и из центра каждой окружности проводится касательная к другой окружности. Доказать, что если равны длины отрезков, соединяющих центр одной окружности и точку касания другой, то равны и радиусы окружностей.

4. Даны 2005 целых чисел. Волшебник Мерлин играет в следующую игру. Чтобы сделать ход, он выбирает некоторые 7 чисел и каждое выбранное число (независимо от других выбранных чисел) увеличивает на 1 или умножает на -1. Доказать, что при помощи конечного числа ходов Мерлин может превратить все 2005 чисел в нули.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие действительные числа, квадратный корень из которых ровно на 1 меньше самого числа.
2. Упростить выражение $2(a+b)^{-1}+(a+c)^{-1}-3(b+c)^{-1}$, если известно, что числа a, b и c положительные и $b^2+2c^2=3a^2$.
3. На школьное здание поместили неоновую рекламу, состоящую из n букв. Её первая буква K, за ней следуют $n-2$ буквы O и последняя буква L. В рабочем цикле рекламы каждая фаза длится одну секунду. В первую секунду не горит ни одна буква; затем загорается K; затем загорается следующая за K буква O; затем следующая O и так далее, пока в конце не горят все буквы. Затем гаснет L, после этого последняя O, после неё предпоследняя O и так далее, пока в последнюю секунду не остаётся гореть только K. Сколько стоит один рабочий цикл рекламы, если горение одной буквы в течение одной секунды стоит 1 цент?
4. Девятизначное натуральное число содержит в своей записи цифры 7, 3 и 8 по крайней мере по одному разу. Если в этом числе зачеркнуть все цифры 7, то останется число, делящееся на 38; если зачеркнуть все цифры 3, то останется число, делящееся на 78; если же зачеркнуть все цифры 8, то останется число, делящееся на 73.
   а) Найти одно такое число, которое состоит только из цифр 7, 3 и 8.
   б) Найти одно такое число, которое не содержит в своей записи ни одной цифры 0 и содержит цифры 7, 3 и 8 ровно по одному разу.
5. На окружности с центром O берутся точки A, B и C. Пусть точки D, E и F – соответственно середины отрезков OA, OB и OC, а G и H – соответсвенно середины отрезков DE и EF. Доказать, что точки O, G, E и H лежат на одной окружности.
6. Из учеников класса каждому мальчику нравится по меньшей мере одна девочка и каждой девочке нравится по меньшей мере один мальчик. Известно, что если для каких-то четырёх учеников A, B, C, D ученику A нравится B, ученику B нравится C, а ученику C нравится D, то ученику A нравится также и D.
   а) Доказать, что в классе найдутся мальчик и девочка, которые нравятся друг другу.
   б) Можно ли утверждать, что в классе найдётся девочка, которая нравится всем мальчикам?

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Прямая $y = ax + b$ проходит через точки $(a; b+1)$ и $(b-1; a)$. Найти значения a и b.

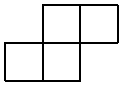
2. Углы α и β треугольника ABC такие, что $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 2$ и $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$. Найти площадь этого треугольника, если длина стороны, противолежащей углу α, равна 30 см.

3. Начиная с 2001 года, 31 декабря каждого года Юра подсчитывал все свои полученные за год оценки. За эти годы успеваемость Юры существенно улучшилась: в каждый следующий год у него было на 20% меньше двоек и на треть больше пятёрок, чем в предыдущий. При этом в 2003 году у него впервые было пятёрок больше, чем двоек. Известно, что ни в один год Юра не получил более 300 оценок. Доказать, что в 2004 году у Юры было пятёрок ровно вдвое больше, чем двоек.

4. У натурального числа n имеются такие различные положительные делители a и b, что выполняется равенство $(a-5)(b+1) = n-5$. Доказать, что $5n$ является квадратом некоторого целого числа.

5. На дуге описанной окружности треугольника ABC, на которую опирается угол ABC, берётся точка D. Биссектриса угла ACD пересекает окружность второй раз в точке E. Пусть X – точка пересечения отрезков BE и AC. Доказать, что если $|XA| = |XB|$, то четырёхугольник $BCDE$ является равнобедренной трапецией или прямоугольником.

6. Мама купила в магазине шоколадку размерами 2×2005. Андрей и Паша решили сыграть в следующую игру. При каждом ходе Андрей может выбрать себе (отломать новый или взять существующий) кусок шоколада, состоящий из одного квадратика, а Паша – изображённый на рисунке кусок из 4 квадратиков (рисунок отражать нельзя). Когда Паша не может больше взять ни одного куска, то все оставшиеся куски достаются Андрею. Ходы делают по очереди, начинает Андрей. Кто получит в случае наилучшей стратегии больше шоколада?



LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Шестой член арифметической прогрессии равен сумме пяти первых, а одиннадцатый член равен 1. Найти первый член этой прогрессии.
2. Найти все такие пары действительных чисел (a, b), при которых график производной, взятой от функции $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$, пересекает ось x в двух различных точках $x = a$ и $x = b$.
3. В гимназии учится определённое число учеников. По итогам первой четверти некоторые из них были отличниками, некоторые хорошистами, а остальные – троечниками. Во второй четверти 85% тех, кто был отличником, остались отличниками, остальные стали хорошистами. Из тех, кто был в первой четверти хорошистом, остались хорошистами 80%, остальные стали троечниками. Все троечники остались троечниками и по итогам второй четверти, кроме Юры, который стал двоечником. Оказалось, что после второй четверти в гимназии отличников, хорошистов и троечников поровну. Найти наименьшее возможное число учеников в гимназии.
4. У положительного целого числа n имеются такие положительные делители a и b, что выполняется равенство $(a-2)(b+1) = n$. Доказать, что $2n+1$ является квадратом некоторого целого числа.
5. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Через точку D проходят ещё две прямые: одна из них параллельна стороне AB и пересекает сторону AC в точке E, другая параллельна стороне AC и пересекает сторону AB в точке F. Доказать, что
$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$
6. В компьютере Папы Карло действует условие, что пароль пользователя должен состоять из 5 маленьких букв. В целях безопасности Папа Карло заменяет это условие новым, согласно которому пароль должен состоять из 4 маленьких букв и 1 специального символа (в порядке, выбираемом пользователем). Буратино является пользователем этого компьютера. Раньше Буратино знал только 30 маленьких букв. Какое наименьшее число специалных символов он должен выучить, чтобы для выбора пароля согласно новому порядку у него было больше возможностей, чем раньше?

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

Lahendused ja vastused

7. klass, I osa

1. 0
2. $\frac{19}{24}$
3. 7
4. 8
5. 12 krooni 80 senti
6. 113°
7. 8,5
8. $\frac{3}{8}$
9. 36π cm^2
10. Ees 6, üleval 4, paremal 2

7. klass, II osa

1. *Vastus:* esimeses reas on 7 ja 8, teises reas 5 ja 1.

   Reas B asuva arvu esimene number peab olema 5, sest arvu 25 kordsed veerus C lõpevad kas 5-ga või 0-ga. Ainukesed arvud, mis algavad 5-ga ja võrduvad mingi algarvu kolmekordsega, on 51 ja 57. Et 7 ei saa olla ühegi arvu ruudu viimane number, siis asub reas B arv 51 ning veerus D ainuke kahekohaline 1-ga lõppev täisruut 81. Veerus C võib asuda arv 25 või arv 75, neist annab reas A kolmega jaguva arvu ainult 75.

2. *Vastus:* $24{,}5\,(\pi-1)$ cm^2.

   Poolringi pindala on $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 7^2 = 24{,}5\pi$ cm^2. Tõmmates kummagi kolmnurga tipust ristlõigu poolringi diameetrile, tekib neli võrdhaarset täisnurkset kolmnurka kaateti pikkusega 3,5 cm. Nende kolmnurkade kogupindala on $4\cdot\frac{3{,}5^2}{2} = \frac{7^2}{2} = 24{,}5$ cm^2. Värvitud osa pindala on poolringi ja kolmnurkade pindalade vahe ehk $24{,}5\pi - 24{,}5 = 24{,}5\,(\pi-1)$ cm^2.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

   a) Kui Andre paneb esimesel päeval mündi esimesse ja teise karpi, teisel päeval teise ja kolmandasse karpi jne kuni viiendal päeval viiendasse ja

esimesse karpi, siis on tal viie päevaga kogunenud igasse karpi 2 münti. Järgmise viie päevaga saab ta samamoodi lisada igasse karpi veel 2 münti.

Müntide kogumise strateegiat näitab järgmine tabel.

Päev	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1. karp	1				1	1				1
2. karp	1	1				1	1			
3. karp		1	1				1	1		
4. karp			1	1				1	1	
5. karp				1	1				1	1

b) Et alguses oli müntide koguarv 0 ja iga päevaga suurenes see 2 võrra, siis oli müntide koguarv igal päeval paarisarv. Kui igas karbis oleks seitse münti, siis oleks münte kokku $5 \cdot 7 = 35$ ehk paaritu arv. Järelikult ei saa sellist olukorda esineda.

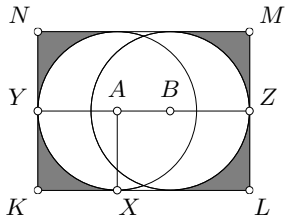
8. klass, I osa

1. $\frac{27}{8}$
2. $x^2 - y^2$
3. 4
4. 8
5. 32,5%
6. 32°
7. 10,5
8. $\frac{1}{2}$
9. 300°
10. Ees 1, üleval 4, paremal 5

8. klass, II osa

1. *Vastus:* esimeses reas on 6, 2, 5, teises 2, 4, 0 ja kolmandas 3, 1, 7.

   Et $2005 = 5 \cdot 401$, siis asub veerus D arv $401 + 222 = 623$. Rea A arv peab olema 5-ga lõppeva arvu ruut, neist on kolmekohalised ainult $15^2 = 225$ ja $25^2 = 625$, seega asub reas A arv 625. Rea B arv peab jaguma 30-ga ja algama numbriga 2, seega võimalused on 210, 240 ja 270. Neist sobib ainult 240, sest muidu oleks veerus E asuval arvul kaks numbrit, teine ja kolmas, paaritud. Rea C arvu kaks viimast numbrit peavad olema paaritud ja nende summa peab olema $11 - 3 = 8$. Variandid on 17, 35, 53 ja 71. Tingimus, et veeru E arv peab andma 4-ga jagades jäägi 1, välistab teise ja neljanda variandi ning tingimus, et veeru F arv peab jaguma 3-ga, välistab kolmanda variandi. Rea C arvuks sobib seega ainult 317.



Joonis 1

2. *Vastus:* $81\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ cm^2.

Lahendus 1. Olgu r kummagi ringjoone raadius ning A ja B ringjoonte keskpunktid (joonis 1). Külje KN pikkus on siis $2r$. Külje KL pikkus on aga

$$|KL| = r + \frac{|KN|}{3} + r = 2r + \frac{2r}{3} = 2r\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8r}{3}.$$

Et $|KL| = 12$ cm, siis saame võrrandi $\frac{8r}{3} = 12$, millest $r = 4{,}5$ cm. Vaatleme nüüd ruutu $KXAY$ küljepikkusega 4,5 cm. Selle pindala on $4{,}5^2$ cm^2, sektori AXY pindala aga $\frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4}$ cm^2. Värvitud osa KXY pindala on järelikult

$$4{,}5^2 - \frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4} = 4{,}5^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2.$$

Et üldse on värvitud neli niisugust osa, siis saame ristküliku värvitud ala kogupindalaks

$$4 \cdot 4{,}5^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 9^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 81\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2.$$

Lahendus 2. Lõik KL on lõigust KN pikem parajasti ringjoonte keskpunktide vahelise kauguse võrra, sest nihutades parempoolset ringjoont selle vahemaa võrra vasakule, katavad ringjooned teineteist ja ristkülik $KLMN$ teiseneb ruuduks. Järelikult

$$|KL| = |KN| + \frac{|KN|}{3} = \frac{4}{3}|KN|.$$

Et $|KL| = 12$ cm, siis $|KN| = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ cm. Värvitud osade pindala leidmiseks tuleb nihutamisel tekkinud ruudu pindalast lahutada ringi pindala. Tulemus on

$$9^2 - \frac{\pi \cdot 9^2}{4} = 81\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2.$$

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

   a) Avatud klappide arv saab igal sammul muutuda ainult paarisarvu võrra, sest kui mingil sammul valitud neljast klapist on alguses a avatud, siis pärast on avatud $4-a$ klappi, seega nende arv muutub $4-a-a=4-2a$ võrra. Kui alguses on avatud üks klapp, siis jääb avatud klappide arv pärast iga sammu paarituks ega saa seetõttu võrduda 8-ga.

   b) Valime ühe avatud ja mingid kolm suletud klappi ning muudame nende nelja klapi asendi vastupidiseks. Pärast seda on basseinis neli klappi avatud ja neli suletud. Teise sammuga avame neli suletud klappi.

9. klass, I osa

1. 2003
2. y^3+x^3
3. 765 ja 234
4. 8
5. 13.30
6. 2 ja 4
7. 90°
8. 19
9. A: ruut, B: romb, C: rööpkülik, D: ristkülik
10. Ees 5, üleval 3, paremal 1

9. klass, II osa

1. *Vastus:* lihapallid kaalusid rohkem.

   Olgu k ja K vastavalt tühja ja täis kõhuga Karlssoni kaal, v ja V vastavalt tühja ja täis kõhuga Väikevenna kaal ning l lihapallide kaal. Et pärast lihapallide ärasöömist sai Karlssonil ja Väikevennal kõht täis, siis

   $$K+V=k+v+l.$$

   Täis kõhuga Väikevend kaalub rohkem kui tühja kõhuga Karlsson, seega $V>k$. Seda arvestades on ülaltoodud võrduse kehtivuseks vajalik, et

   $$K<v+l.$$

   Samuti, täis kõhuga Karlsson kaalub kaks korda rohkem kui tühja kõhuga Väikevend ehk $K=2v$. Asetades selle viimasesse võrratusse ja koondades mõlemalt poolelt suuruse v, saame

   $$v<l.$$

   Järelikult kaalusid lihapallid rohkem kui tühja kõhuga Väikevend.

2. *Vastus:* a) jah; b) jah.

a) Paneme tähele, et arv

$$240 = 8 \cdot 30 = 10 \cdot 24 = 12 \cdot 20 = 15 \cdot 16$$

jagub arvudega 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24 ja 30. Seega annab arv 247 kõigi nende arvudega jagades jäägi 7.

b) Paneme tähele, et arv

$$720 = 8 \cdot 90 = 9 \cdot 80 = 10 \cdot 72 = 12 \cdot 60 = \\ = 15 \cdot 48 = 16 \cdot 45 = 18 \cdot 40 = 20 \cdot 36 = 24 \cdot 30$$

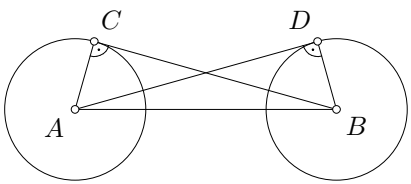
jagub arvudega 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24 ja 30. Seega annab arv 727 kõigi nende arvudega jagades jäägi 7.

Märkus. Lahendusest nähtub, et arvud 247 ja 727 annavad vastavalt täpselt 8 ja täpselt 10 jääki 7.

Järgnevas tabelis on kirjas kõik arvud, mis sobivad ülesande a)-osa lahendusse. Neist 727 ja 847 sobivad ühtlasi ka b)-osa lahendusse.

Arv:	247	367	427	487	511	547	607	727	847	907	967
Jääkide 7 arv:	8	9	8	8	8	8	8	10	10	8	8

3. Olgu A ja B antud ringjoonte keskpunktid ning C ja D neid ringjooni puutuvate sirgete puutepunktid (joonis 2). Siis $\angle ACB = 90^\circ$ ja $\angle BDA = 90^\circ$. Ülesande tingimuste põhjal $|BC| = |AD|$. Seega on ACB ja BDA täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusid langevad kokku ja vastavad kaatetid on võrdsed. Järelikult on võrdsed ka nende kolmnurkade teised kaatetid ehk $|AC| = |BD|$.



Joonis 2

4. *Lahendus 1.* Vaatleme kõigi arvude absoluutväärtuste summat. Näitame, et Merlin saab seda summat vähendada 1 võrra. Kui antud 2005 arvu hulgas leidub vähemalt üks negatiivne, siis valime välja selle ja veel mingid 6 arvu; esimesele arvule liidame ühe ja ülejäänud 6 arvu korrutame (-1)-ga, millega absoluutväärtuste summa väheneb 1 võrra. Kui antud 2005 arvu

hulgas ei leidu negatiivseid, aga leidub vähemalt üks positiivne, siis valime välja ühe positiivse arvu ja veel mingid 6 arvu ning korrutame kõiki arve (-1)-ga; seejärel teeme eelnevas kirjeldatud sammu. Niisuguste operatsioonidega saame arvude absoluutväärtuste summat vähendada juhul, kui arvude hulgas leidub nullist erinevaid arve. Kui absoluutväärtuste summa on kahanenud nullini, siis on ka kõik antud arvud muutunud nullideks.

Lahendus 2. Näitame, et Merlin saab vähendada suvalise arvu erinevust nullist 1 võrra, jättes kõik ülejäänud arvud samaks. Olgu a vaadeldav arv. Valime veel mingid 6 arvu. Kui $a > 0$, siis korrutame teda esmalt (-1)-ga ja seejärel liidame talle $2a-1$ korda arvu 1, ülejäänud 6 arvu korrutame igal käigul (-1)-ga. Nii asendub arv a arvuga $-a+(2a-1) = a-1$, ülejäänud 6 arvu jäävad samaks, sest neid korrutatakse $2a$ korda arvuga -1. Kui $a < 0$, siis liidame talle $2(-a)-1$ korda arvu 1 ja lõpuks korrutame teda (-1)-ga, ülejäänud 6 arvu korrutame igal käigul (-1)-ga. Siis asendub arv a arvuga $-(a+2(-a)-1) = a+1$, ülejäänud 6 arvu jäävad jällegi samaks. Niiviisi positiivseid arve vähendades ja negatiivseid arve suurendades saab Merlin kõik nullist erinevad arvud järk-järgult nullideks muuta.

Lahendus 3. Näitame kõigepealt, et nelja käiguga saab Merlin suurendada suvalist ühte ja vähendada suvalist teist arvu 1 võrra, jättes kõik teised arvud samaks. Olgu a suurendatav arv ja b vähendatav arv. Valime veel mingid 6 arvu $c_1, \ldots, c_6$ ning teisendame arve järgmiselt (valides esimesel käigul arvud $a, c_1, \ldots, c_6$ ja ülejäänud kolmel käigul arvud $c_1, \ldots, c_6, b$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & & a+1 & & & & & & \\
c_1 & & -c_1 & & c_1 & & -c_1 & & c_1 \\
\vdots & \to & \vdots & \to & \vdots & \to & \vdots & \to & \vdots \\
c_6 & & -c_6 & & c_6 & & -c_6 & & c_6 \\
 & & b & & -b & & -b+1 & & b-1
\end{array}$$

Fikseerime nüüd ühe suvalise arvu a. Valides järgnevalt mingi arvu $b > 0$ (kui selliseid on), saab Merlin ülalkirjeldatud viisil vähendada arvu b järk-järgult nullini, nii et arv a vastavalt suureneb ja ülejäänud arvud ei muutu. Nii saab ta teha järjest nullideks kõik algselt positiivsed arvud peale arvu a. Valides seejärel mingi arvu $b < 0$ (kui selliseid on), saab Merlin samal viisil suurendada arvu b järk-järgult nullini, nii et arv a vastavalt väheneb ja ülejäänud arvud ei muutu. Nii saab ta teha järjest nullideks kõik algselt negatiivsed arvud peale arvu a. Seega on nüüd kõik arvud peale a muudetud nullideks. Kui $a > 0$, siis valime talle 6 kaaslast ja korrutame kõiki arve (-1)-ga. Ainukese nullist erineva negatiivse arvu aga saame nulliks muuta operatsioonidega, kus vaadeldavale arvule liidame 1, mingit 6 nulliga võrduvat arvu aga korrutame (-1)-ga.

10. klass

1. *Vastus:* $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ on ainus selline arv.

   Lahendus 1. Otsitavad arvud on parajasti võrrandi $\sqrt{x} = x - 1$ lahendid. Tõstes selle võrrandi pooled ruutu, saame $x = (x-1)^2$ ehk $x^2 - 3x + 1 = 0$. Tekkinud ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Lahend x_1 rahuldab esialgset võrrandit, sest $x_1 > 0$ ja $x_1 - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, lahend x_2 aga ei rahulda, sest arv $x_2 - 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ei saa olla ruutjuure väärtuseks.

   Lahendus 2. Ülesande tingimustest saadud võrrandis $\sqrt{x} = x - 1$ teeme muutujavahetuse $\sqrt{x} = y$. Saame võrrandi $y = y^2 - 1$ ehk $y^2 - y - 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ja $y_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et arvu ruutjuur ei saa olla negatiivne, siis esimene lahend ei sobi. Järelikult $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, millest $x = \dfrac{1^2 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. *Vastus:* 0.

   Teisendame antud avaldist:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (a+b)^{-1} + (a+c)^{-1} - 3 \cdot (b+c)^{-1} &= \\
&= \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a+c} - \frac{3}{b+c} = \\
&= \frac{2(a+c)(b+c) + (a+b)(b+c) - 3(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \\
&= \frac{2c^2 + b^2 - 3a^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 0.
\end{aligned}$$

3. *Vastus:* n^2 senti.

   Lahendus 1. Igas faasis põleb niisama palju tähti, kui palju temast poole tsükli (st n faasi) kaugusele jäävas faasis on kustunud. Seega jagunevad faasid n paariks, milles põlevad vastavalt 0 ja n, 1 ja $n-1$, …, $n-1$ ja 1 tähte, st põlevate tähtede koguarv igas vaadeldavas faaside paaris on n. Et paare on n ja igas paaris põleb n tähte, siis ühtekokku põlevad tähed tsükli jooksul n^2 sekundit.

   Lahendus 2. Põlevate tähtede arvud faaside kaupa on 0, 1, …, n, $n-1$, …, 1. Et ühe tähe põlemine ühe faasi kestel maksab ühe sendi, siis võrdub

reklaami töötsükli hind nende arvude summaga sentides. Aritmeetilise jada summa valemi kohaselt

$$(0+1+\ldots+n)+(n-1+\ldots+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Viies murrud ühisele nimetajale ja võttes ühise teguri n sulgude ette, saame

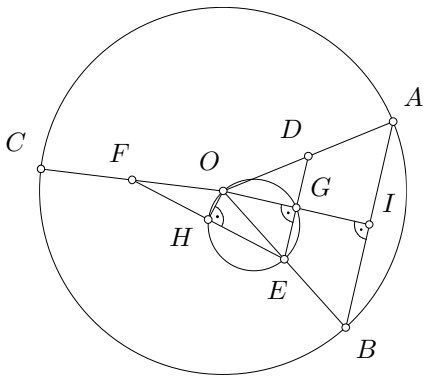
$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2.$$

4. *Vastus:* a) sobib näiteks arv 738738738; b) sobib näiteks arv 738649116.

   a) Arv 738 ilmselt rahuldab nõutud jaguvuse tingimusi. Sobiva 9-kohalise ainult numbritest 7, 3 ja 8 koosneva arvu saame, kui kirjutame arvu 738 kolm korda järjest – kõigi numbrite 7 kustutamisel saame siis $383838 = 10101\cdot 38$, kõigi numbrite 3 kustutamisel $787878 = 10101\cdot 78$ ning kõigi numbrite 8 kustutamisel $737373 = 10101\cdot 73$.

   b) Piisab leida arvude 73, 38 ja 78 selline ühiskordne $\overline{uvwxyz}$, mis ei sisalda numbreid 7, 3, 8 ega 0. Siis on arv $738\overline{uvwxyz}$ nõutava omadusega: numbri 7 kustutamisel saame arvu $38\overline{uvwxyz}$, numbri 3 kustutamisel arvu $78\overline{uvwxyz}$ ning numbri 8 kustutamisel arvu $73\overline{uvwxyz}$, mis jaguvad vastavalt 38-ga, 78-ga ja 73-ga. Arvu $\text{VÜK}(73, 38, 78) = 108186$ kordseid läbi proovides leiame, et arvuks $\overline{uvwxyz}$ sobib $6\cdot 108186 = 649116$.

   Märkus. On veel ainult üks arv, mis sobib selle ülesande a)-osa vastuseks, nimelt 378738378. Ülesande b)-osa rahuldab rohkem arve.



Joonis 3

5. *Lahendus 1.* Et $|OA| = |OB|$, siis ka $|OD| = |OE|$, seega on kolmnurk ODE võrdhaarne (joonis 3). Punkt G kui aluse DE keskpunkt on siis tipust O tõmmatud kõrguse aluspunkt ning $\angle OGE = 90°$. See aga tähendab, et

punkt G asub ringjoonel diameetriga OE. Analoogiliselt saame, et punkt H asub ringjoonel diameetriga OE.

Lahendus 2. Olgu I lõigu AB keskpunkt. Siis on lõik OI võrdhaarse kolmnurga OAB tipust O tõmmatud kõrgus. Et OIB on täisnurkne kolmnurk hüpotenuusiga OB ja täisnurgaga tipu I juures, siis asub I ringjoonel diameetriga OB. Vähendades kolmnurga OIB lineaarmõõtmeid kaks korda, teiseneb ta kolmnurgaks OGE. Järelikult asub punkt G ringjoonel diameetriga OE. Sama kehtib punkti H kohta.

Märkus. Lahendusest võime järeldada, et kui punkt B on fikseeritud, punkt A aga teeb mööda ringjoont liikudes täisringi, siis kujundab punkt G ringjoone diameetriga OE.

6. *Vastus:* b) ei.

Lahendus 1. a) Valime klassist välja ühe poisi. Talle meeldivate tüdrukute hulgast valime ühe tüdruku, edasi sellele tüdrukule meeldivate poiste hulgast ühe poisi, siis järgmise tüdruku jne. Varem või hiljem peame mõne õpilase valima teist korda. Seega leidub õpilaste hulgas mingi poistest ja tüdrukutest koosnev tsükkel $P_1 \to T_1 \to P_2 \to T_2 \to \ldots \to P_k \to T_k \to P_1$, kus igale õpilasele meeldib talle järgnev õpilane. Kui tsükkel koosneb ainult kahest liikmest, siis on „õnnelik paar“ leitud. Vastasel korral rahuldavad P_1, T_1, P_2, T_2 ülesande tingimust, järelikult P_1-le meeldib T_2 ning me saame tsüklist ära jätta T_1 ja P_2. Järk-järgult tsüklit lühendades jõuame lõpuks kaheliikmelise tsüklini.

b) Klass võib koosneda neljast õpilasest, kes moodustavad kaks „õnnelikku paari“.

Lahendus 2. a) Kasutame induktsiooni õpilaste arvu järgi. Kui klassis on üks poiss ja üks tüdruk, siis vastavalt ülesande tingimustele meeldivad nad teineteisele. Vaatleme nüüd klassi, kus on $n + 1$ õpilast. Eemaldame ühe õpilase – üldisust kitsendamata olgu see tüdruk. Kui järelejäänud n õpilase hulgas on ülesande tingimused täidetud, siis saame kasutada induktsiooni eeldust ja leida „õnneliku paari“. Samas võis aga juhtuda, et esialgses klassis leidus mõni poiss, kellele meeldis ainult väljajäetud tüdruk. Sel juhul eemaldame klassist ka kõik niisugused poisid. Kui nüüd allesjäänud õpilaste hulk rahuldab ülesande tingimusi, saame jälle kasutada induktsiooni eeldust, kui aga mitte, siis jätkame nende tüdrukute eemaldamisega, kes kaotasid poiste väljajätmisega kõik neile meeldivad poisid. Nii jätkates jõuame lõpuks kas induktsiooni eeldusi rahuldava hulgani või tühja hulgani. Esimesel juhul on ülesanne lahendatud. Teisel juhul järeldub ülesande „meeldivustingimusest” induktsiooniga, et esimesena välja jäetud tüdruk meeldib kõigile poistele. Kuna ka sellele tüdrukule peab mõni poiss meeldima, siis oleme jällegi leidnud „õnneliku paari“.

b) Kui klass jaguneb hulgaks „sõpruskondadeks“, millest igaühes leidub nii poisse kui ka tüdrukuid ning milles igale poisile meeldivad kõik tüdrukud ja igale tüdrukule kõik poisid, siis on ülesande tingimused täidetud, aga pole tüdrukut, kes meeldiks kõigile poistele.

11. klass

1. *Vastus:* $a = b = 1$.

   Kuna sirge $y = ax + b$ läbib punkti $(a;\, b+1)$ ja $(b-1;\, a)$, siis

$$a \cdot a + b = b + 1,$$
$$a \cdot (b-1) + b = a.$$

   Esimesest võrrandist saame $a^2 = 1$ ehk $a = \pm 1$. Kui $a = -1$, siis annab teine võrrand $-(b-1) + b = -1$, ehk $1 = -1$, vastuolu. Kui $a = 1$, siis annab teine võrrand $(b-1) + b = 1$ ehk $2b = 2$, kust $b = 1$.

2. *Vastus:* $450\ \mathrm{cm}^2$.

   Kasutades kahekordse nurga siinuse valemit, saame

$$4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= 4\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4\sin^2\alpha.$$

   Seega teiseneb ülesande esimene võrrand võrrandiks $4\sin^2\alpha = 2$ ehk $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$. Et α on kolmnurga nurk, siis $\sin\alpha > 0$ ning seega $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kust $\alpha = 45^\circ$ või $\alpha = 135^\circ$.

   Ülesande teise võrrandi kirjutame kahekordse nurga koosinuse valemi abil kujul $\cos 2\beta = 0$, millest $2\beta = 90^\circ$ või $2\beta = 270^\circ$ ehk $\beta = 45^\circ$ või $\beta = 135^\circ$. Et α ja β on ühe ja sama kolmnurga kaks nurka, siis $\alpha + \beta < 180^\circ$, mistõttu ainsa võimalusena saame, et $\alpha = \beta = 45^\circ$. Niisiis on ABC võrdhaarne täisnurkne kolmnurk kaateti pikkusega 30 cm. Sellise kolmnurga pindala on $\frac{30 \cdot 30}{2} = 450\ \mathrm{cm}^2$.

3. *Lahendus 1.* Olgu Jukul 2001. aastal K kahte ja V viit, siis 2002., 2003. ja 2004. aastal oli tal vastavalt $\frac{4}{5}K$, $\frac{4^2}{5^2}K$ ja $\frac{4^3}{5^3}K$ kahte ning vastavalt $\frac{4}{3}V$, $\frac{4^2}{3^2}V$ ja $\frac{4^3}{3^3}V$ viit. Et need kõik peavad olema täisarvud, siis peab K jaguma arvuga $5^3 = 125$ (sest SÜT $(4,5) = 1$) ning V peab jaguma arvuga $3^3 = 27$ (sest SÜT $(4,3) = 1$).

Et Juku ei saanud aastas üle 300 hinde, siis K ei saa olla suurem kui $2 \cdot 125 = 250$. Kui aga oleks $K = 250$, siis saanuks Juku 2003. aastal $\frac{4^2}{5^2}K = 160$ kahte ja rohkem kui 160 viit, ehk kokku ikkagi üle 300 hinde. Seega $K = 125$ ning Juku kahtede arvud 2002., 2003. ja 2004. aastal olid vastavalt $\frac{4}{5} \cdot 125 = 100$, $\frac{4}{5} \cdot 100 = 80$ ja $\frac{4}{5} \cdot 80 = 64$. Et viite arv ületaks kahtede arvu esmakordselt 2003. aastal, peab olema $\frac{4}{3}V \leqslant 100$ ja $\frac{4^2}{3^2}V > 80$, ehk $V \leqslant 75$ ja $V > 45$. Arvestades, et V peab jaguma 27-ga, leiame siit ainsa võimalusena $V = 54$, kust viite arv 2004. aastal on $\frac{4^3}{3^3} \cdot 54 = 128$ ehk täpselt kaks korda suurem kahtede arvust samal aastal.

Lahendus 2. Olgu Jukul 2004. aastal K kahte ja V viit. Siis 2003., 2002. ja 2001. aastal oli tal vastavalt $\frac{5}{4}K$, $\frac{5^2}{4^2}K$ ja $\frac{5^3}{4^3}K$ kahte ning vastavalt $\frac{3}{4}V$, $\frac{3^2}{4^2}V$ ja $\frac{3^3}{4^3}V$ viit. Et need arvud oleksid kõik täisarvud, peavad K ja V jaguma arvuga $4^3 = 64$. Arvestades, et Juku ei saanud ühelgi aastal üle 300 hinde, tulevad K ja V väärtustena kõne alla ainult 64, 128, 196 (väärtus 0 ei sobi, sest siis ei saaks kahtede ülekaal muutuda viite ülekaaluks; väärtused 256 ja suuremad samuti ei sobi, sest $256+64 > 300$). Tingimusest, et 2003. aastal oli Jukul viisi kahtedest rohkem, saame $\frac{3}{4}V > \frac{5}{4}K$ ehk $\frac{V}{K} > \frac{5}{3}$. Tingimusest, et 2002. aastal oli Jukul viisi ülimalt sama palju kui kahtesid, saame $\frac{3^2}{4^2}V \leqslant \frac{5^2}{4^2}K$ ehk $\frac{V}{K} \leqslant \frac{5^2}{3^2}$. Seega peab $\frac{V}{K}$ rahuldama võrratusi

$$\frac{5}{3} < \frac{V}{K} \leqslant \frac{25}{9}.$$

Et $V > K$, siis võivad suhte $\frac{V}{K}$ väärtused olla $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ ja $\frac{3}{2}$, neist rahuldab võrratusi ainult esimene.

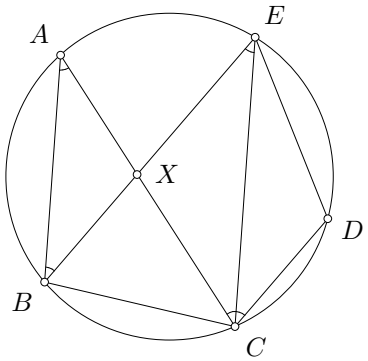
4. Avades sulud ja koondades mõlemalt poolt liikme -5, saame

$$ab - 5b + a = n.$$

Et ab, a ja n jaguvad a-ga, siis peab ka $5b$ jaguma a-ga. Teisalt, et ab, $5b$ ja n jaguvad b-ga, siis peab ka a jaguma b-ga. Olgu $5b = ka$ ja $a = lb$, kus vastavalt ülesande tingimusele $l \neq 1$. Siis $5b = klb$ ehk $5 = kl$. Ainsa võimalusena saame siit $l = 5$, st $a = 5b$. Nüüd

$$5n = 5 \cdot (ab - 5b + a) = 5 \cdot (5b^2 - 5b + 5b) = 25b^2 = (5b)^2.$$

Märkus. Lahendusest nähtub, et ülesande tingimusi rahuldab lõpmata palju arve, kõik nad on määratud valemiga $n = 5m^2$, kus m on positiivne täisarv. Ülesandes nimetatud tegurid on $a = 5m$ ja $b = m$.



Joonis 4

5. Et $|XA| = |XB|$, siis $\angle CAB = \angle EBA$ (joonis 4). Nüüd

$$\angle DCE = \angle ECA = \angle EBA = \angle CAB = \angle CEB.$$

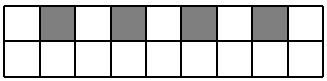
Järelikult on sirged CD ja BE paralleelsed. Et nurgad DCE ja CEB on võrdsed, siis toetuvad nad sama pikkusega kaartele, mistõttu $|CB| = |DE|$.

6. *Vastus:* Ats.

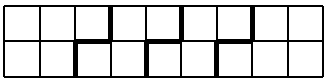
Värvime ruudustiku nii, nagu näidatud joonisel 5. Värvitud ruute on kokku $\frac{2005-1}{2} = 1002$. Et Pets saab lõigata ainult neljaruudulisi rombikujulisi tükke, siis peab iga tema tükk sisaldama parajasti ühte värvitud ruutu. Kui Ats valib oma tükke samuti ainult värvitud ruutude seast, siis lõpeb mäng täpselt 1002 käigu pärast. Pets saab selle ajaga 501 rombikujulist tükki ehk $4 \cdot 501 = 2004$ tükki šokolaadi. Ats saab aga kõik ülejäänud tükid, mida on $2 \cdot 2005 - 2004 = 2006$.

Märkus 1. Lahenduses ei kasutata fakti, et Ats alustab. Ats võidaks ka siis, kui alustaja oleks Pets. Samuti nähtub lahendusest, et Ats võidaks isegi juhul, kui lubada Petsil kujundit kirjeldavat joonist peegeldada.

Märkus 2. On võimalik tõestada, et Pets saab endale garanteerida vähemalt 2004 tükki. Jagame šokolaadi osadeks nii, nagu näidatud joonisel 6. Nii tekib 1002 osa. Kui Pets valib igal käigul tüki, mis mahub tervenisti ühe osa sisse, siis saab ta valida vähemalt 501 tükki, sest Ats suudab oma käiguga maksimaalselt ühe osa Petsile sobimatuks muuta.



Joonis 5



Joonis 6

12. klass

1. *Vastus:* $-\frac{1}{7}$.

Lahendus 1. Olgu vaadeldava jada üldliige $a_n = a_1 + (n-1)d$, siis

$$a_1 + \ldots + a_5 = 5a_1 + (1+2+3+4)\cdot d = 5a_1 + 10d$$

ning $a_6 = a_1 + 5d$. Niisiis $5a_1 + 10d = a_1 + 5d$, ehk $4a_1 + 5d = 0$, kust $d = -\frac{4}{5}a_1$. Nüüd $a_{11} = a_1 + 10d = a_1 - \frac{40}{5}a_1 = -7a_1$, kust $a_1 = -\frac{1}{7}a_{11} = -\frac{1}{7}$.

Lahendus 2. Aritmeetilise jada summa valemi abil saame $\frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5 = a_6$ ehk

$$5a_1 + 5a_5 = 2a_6.$$

Võrdusest $a_5 - a_1 = \frac{4}{5}(a_6 - a_1)$ avaldame $5a_5 = 4a_6 + a_1$. Asetades tulemuse eelmisse võrdusse, saame

$$6a_1 + 2a_6 = 0.$$

Et $a_6 - a_1 = a_{11} - a_6$, siis

$$a_1 = 2a_6 - a_{11} = -6a_1 - 1,$$

kust $7a_1 = -1$ ja $a_1 = -\frac{1}{7}$.

2. *Vastus:* $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{9}$ on ainus selline arvupaar.

Lahendus 1. Funktsiooni $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tuletis on

$$y' = 3x^2 + 2ax + b = 3\cdot\left(x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3}\right).$$

Vastavalt ülesande tingimusele on selle nullkohtadeks, ehk teisisõnu ruutvõrrandi $x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3} = 0$ lahenditeks, parajasti a ja b. Viete'i valemitest saame $a + b = -\frac{2a}{3}$ ja $ab = \frac{b}{3}$. Kui siin $b = 0$, siis esimesest võrdusest saame, et ka $a = 0$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Seega $b \neq 0$ ning $a = \frac{1}{3}$. Esimene võrdus omandab nüüd kuju $\frac{1}{3} + b = -\frac{2}{9}$, kust $b = -\frac{5}{9}$.

Lahendus 2. Et a ja b on tuletise $y' = 3x^2 + 2ax + b$ nullkohad, siis peavad nad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a^2 + 2a^2 + b = 0 \\ 3b^2 + 2ab + b = 0. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist leiame $b = -5a^2$. Asetades selle teise võrrandisse, saame $75a^4 - 10a^3 - 5a^2 = 0$. Kui oleks $a = 0$, siis oleks ka $b = 0$, mis ei sobi ülesande tingimustega. Seega võime viimase võrrandi pooli jagada arvuga $5a^2$, millega tekib ruutvõrrand $15a^2 - 2a - 1 = 0$. Selle lahendid on $a = -\frac{1}{5}$ ja $a = \frac{1}{3}$. Esimesel juhul saame $b = -\frac{1}{5}$, teisel juhul aga $b = -\frac{5}{9}$. Et a ja b peavad olema erinevad, siis sobib ainult teine võimalus.

3. *Vastus:* 103.

   Eeldame, et pärast esimest veerandit oli gümnaasiumis a viielist, b neljalist ja c kolmelist õpilast. Pärast teist veerandit oli viielisi õpilasi $\frac{17}{20}a$, neljalisi õpilasi $\frac{3}{20}a + \frac{4}{5}b$ ning kolmelisi õpilasi $\frac{b}{5} + c - 1$. Ülesande tingimuste põhjal on need kolm arvu võrdsed. Võrdusest $\frac{17}{20}a = \frac{3}{20}a + \frac{4}{5}b$ leiame

$$b = \frac{5}{4}\left(\frac{17}{20}a - \frac{3}{20}a\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{14}{20}a = \frac{7}{8}a.$$

   Võrdusest $\frac{17}{20}a = \frac{b}{5} + c - 1$ saame

$$c = \frac{17}{20}a - \frac{b}{5} + 1 = \frac{17}{20}a - \frac{7}{40}a + 1 = \frac{27}{40}a + 1.$$

   Et c on täisarv, siis peab a jaguma 40-ga, st $a = 40n$, kus n on täisarv. Ka kõik teised õpilaste arvud tulevad sel juhul täisarvud. Kokku on gümnaasiumis õpilasi

$$a + b + c = a + \frac{7}{8}a + \frac{27}{40}a + 1 = \frac{102}{40}a + 1 = 102n + 1.$$

   Juht $n = 0$ ei sobi, sest pärast esimest veerandit leidus nii viielisi kui ka neljalisi õpilasi. Vähima õpilaste arvu annab seega $n = 1$, mille korral on gümnaasiumis $102 + 1 = 103$ õpilast.

4. Avades sulud, saame

$$ab - 2b + a - 2 = n.$$

   Et ab, a ja n jaguvad a-ga, siis peab $2b + 2$ jaguma a-ga. Teisalt, et ab, $2b$ ja n jaguvad b-ga, siis peab ka $a - 2$ jaguma b-ga. Järelikult $2b + 2 = ka$ ja $a - 2 = lb$, kus k ja l on positiivsed täisarvud (l on positiivne, sest $a - 2$ on ülesande tingimuste põhjal arvu n tegur ja positiivne). Avaldades teisest võrdusest a ja asetades esimesse, saame $2b + 2 = klb + 2k$. Kui oleks $k = l = 1$, siis kehtiks $2b + 2 = b + 2$ ehk $b = 0$, mis pole võimalik, sest b on arvu n tegur. Seega $kl \geqslant 2$. Et $klb \geqslant 2b$ ja $2k \geqslant 2$, siis annab saadud võrdus ainsa võimalusena $k = 1$, $l = 2$ ehk $a = 2b + 2$. Nüüd

$$2n + 1 = 2 \cdot (ab - 2b + a - 2) + 1 =$$

$$= 2 \cdot \big((2b+2)b - 2b + 2b + 2 - 2\big) + 1 =$$
$$= 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2.$$

Märkus. Lahendusest nähtub, et ülesande tingimusi rahuldab lõpmata palju arve, kõik nad on määratud valemiga $n = 2m(m+1)$, kus m on positiivne täisarv. Ülesandes nimetatud tegurid on $a = 2m+2$ ja $b = m$.

5. *Lahendus 1.* Nelinurk $AEDF$ on romb (joonis 7), sest tema vastasküljed on paralleelsed ning diagonaal AD poolitab nurga EAF. Et kolmnurgad ECD ja FDB on sarnased paralleelsete külgede tõttu, siis

$$\frac{|EC|}{|FD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$$

ning

$$\frac{|ED|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Korrutades need võrdused pooliti ja arvestades, et $|ED| = |FD|$, saamegi vajaliku tulemuse.

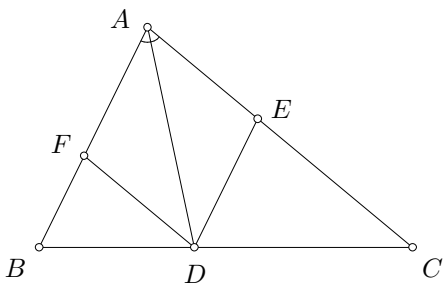
Lahendus 2. Nurgapoolitaja omaduse põhjal

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Et kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga FBD, siis $|AB| = \dfrac{|FB|}{|BD|} \cdot |BC|$. Analoogiliselt leiame $|AC| = \dfrac{|EC|}{|CD|} \cdot |BC|$. Asendades viimased kaks avaldist esimesse võrdusesse, saame

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|FB|}{|BD|} \cdot \frac{|CD|}{|EC|},$$

millest järeldub otsitav võrdus.



Joonis 7

6. *Vastus.* 7.

Olgu x vajalike erisümbolite arv. Vana reegli kohaselt oli Buratinol parooli valimiseks 30^5 võimalust, sest igaühte parooli 5 sümbolist võis ta valida 30 viisil. Uue reegli puhul on 5 võimalust valida positsioon, mitmendal esineb paroolis erisümbol, x võimalust valida see erisümbol ning 30^4 võimalust valida ülejäänud positsioonidele tähed, üldse seega $5x \cdot 30^4$ võimalust. Selleks, et uue reegli puhul oleks parooli valimiseks rohkem võimalusi, peab kehtima võrratus $5x \cdot 30^4 > 30^5$ ehk $5x > 30$, millest $x > 6$. Järelikult peab Buratino selgeks õppima vähemalt 7 erisümbolit.

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

Juhised lahenduste hindamiseks

Lp hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu kõigi teiste ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

4. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

5. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

VII klass, I osa

1. Antud õige vastus 0: 2 p
   Antud vastuseks 6240 (avaldise väärtus): 1 p

2. Märgitud õige vastus $\frac{19}{24}$: 2 p
   Märgitud õige vastus $\frac{19}{24}$ ja lisaks üks vale murd: 1 p

3. Antud õige vastus 7: 2 p
   Vastuseks loetletud õiged arvud 2 ja 5: 1 p

4. Antud õige vastus 8: 2 p
   Antud vastuseks (või joonisel märgitud) x naaberkülgedel asuvad arvud 3 ja 5: 1 p

5. Antud õige vastus 12 krooni ja 80 senti või 12,8 krooni või 12.80: 2 p
   Antud vastuseks 64 krooni või 64.00 (1 kg koogi hind laupäeval): 1 p

6. Antud õige vastus 113° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p
   Antud vastuseks 113 ilma kraadimärgita: 1 p

7. Antud õige vastus 8,5 või $8\frac{1}{2}$ või $\frac{17}{2}$: 2 p
   Antud vastuseks arv 8,5 (või sama arv liig- või segamurruna) koos mõne sobimatu pindalaühikuga (näiteks 8,5 cm^2): 1 p

8. Antud õige vastus $\frac{3}{8}$ või 0,375 või 37,5%: 2 p
   Antud vastuseks värvimata osa suurus $\frac{5}{8}$ või 0,625 või 62,5%: 1 p

9. Antud õige vastus 36π cm^2 või sama suurus väljendatuna teistes pindalaühikutes: 2 p
   Antud vastuseks 36π ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
   Antud õigesti ümardatud vastus vähemalt 3 tüvenumbri täpsusega ja õige ühikuga (näiteks 113 cm^2): 1 p

10. Kantud joonise kõigile kolmele tahule vastav õige arv (sõltumata sellest, mis pidi arvud on joonistatud): 2 p
    Kantud joonisele õigesti kaks kolmest arvust: 1 p

VII klass, II osa

1. Õige vastuse eest koos selgitusega, miks lahend sobib: 3 p
   Põhjenduse eest, et muid võimalusi pole: 4 p

   Skeemi teises osas anda 1 punkt iga numbri eest, mille korral on näidatud, et muid võimalusi pole (ka siis, kui õigesti on leitud vaid osa numbreid).

   Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgituseta, miks lahend sobib, anda 2 punkti. Kui on õigesti leitud 2 või 3 numbrit, siis anda 1 punkt.

2. Poolringi pindala leidmise eest: 2 p
   Ühe või mõlema kolmnurga pindala leidmise eest: 4 p
   Korrektse lõppvastuse leidmise eest: 1 p

   Kui arvutustes on arvu π asemel kasutatud selle lähisväärtust ja/või lõppvastus on antud ligikaudsena, siis anda kokku 1 punkt vähem. Kui lõppvastus on antud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda samuti 1 punkt vähem, kuid mõlema puuduse (ligikaudse π väärtuse kasutamine ja ühiku puudumine) korraga esinemisel nende eest mahavõetavaid punkte mitte liita (st anda ikkagi kokku 1 punkt vähem).

   Ainult õige (täpse ja õige ühikuga) vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti, ligikaudse ja/või ühikuta vastuse eest 1 punkt.

3. a)-osas sobiva müntide kogumise strateegia kirjeldamise eest: 3 p
   b)-osa põhjenduse eest: 4 p

   Kui a)-osas pole müntide karpidesse asetamisel arvestatud, et mündid tuleb iga päev asetada *kahte* karpi, anda selle osa eest 1 punkt.

   Ainult täieliku õige vastuse (a) „jah“, b) „ei“) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

VIII klass, I osa

1. Antud õige vastus $\frac{27}{8}$ või $3\frac{3}{8}$ või 3,375: 2 p
   Antud vastuseks $\frac{243}{72}$ või sama arv mõnel teisel taandamata kujul: 1 p

2. Märgitud õige vastus $x^2 - y^2$: 2 p
   Märgitud õige vastus $x^2 - y^2$ ja lisaks üks vale vastus: 1 p
   Leitud õigesti kõigi avaldiste väärtused või kirjutatud vastuseks vähima avaldise väärtus 0 (kuid ring on ümber tõmbamata): 1 p

3. Antud õige vastus 4: 2 p

4. Antud õige vastus 8: 2 p

5. Antud õige vastus 32,5% või 32,5: 2 p
   Antud vastuseks 67,5% või 67,5 (see osa sallist, mis on juba kootud): 1 p

6. Antud õige vastus 32° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p
   Antud vastuseks 32 ilma kraadimärgita: 1 p

7. Antud õige vastus 10,5 või $10\frac{1}{2}$ või $\frac{21}{2}$: 2 p
   Antud vastuseks arv 10,5 (või sama arv liig- või segamurruna) koos mõne sobimatu pindalaühikuga (näiteks 10,5 cm^2): 1 p

8. Antud õige vastus $\frac{1}{2}$ või 0,5 või 50%: 2 p

9. Antud õige vastus 300° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p
   Antud vastuseks 300 ilma kraadimärgita: 1 p

10. Kantud joonise kõigile kolmele tahule vastav õige arv (sõltumata sellest, mis pidi arvud on joonistatud): 2 p
    Kantud joonisele õigesti kaks kolmest arvust: 1 p

VIII klass, II osa

1. Õige vastuse eest koos selgitusega, miks lahend sobib: 3 p
   Põhjenduse eest, et muid võimalusi pole: 4 p

   Skeemi teises osas anda 0,5 punkti iga numbri eest, mille korral on näidatud, et muid võimalusi pole (ka siis, kui õigesti on leitud vaid osa numbreid). Skeemi teise osa eest saadavad punktid ümardada allapoole (näiteks kui põhjendatud on 5 numbri ühesus, siis anda 2 punkti).

   Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgituseta, miks lahend sobib, anda 2 punkti. Kui on õigesti leitud vähemalt 5 numbrit, siis anda 1 punkt.

2. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks ringjoonte raadiuse abil (vt žürii lahendus 1) ning ühe ringjoone nihutamise abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus ringjoonte raadiuse abil.

   Tähelepaneku eest, et külje KN pikkus on kaks ringjoonte raadiust: 1 p
   Külje KL pikkuse avaldamise eest külje KN ja ringjoonte raadiuse kaudu: 1 p
   Ringjoonte raadiuse leidmise eest: 2 p

Idee eest vaadelda väikest ruutu: 1 p
Värvitud osade pindala leidmise eest: 2 p

Lahendus ühe ringjoone nihutamise abil.

Idee eest nihutada üht ringjoont, nii et tekiks ruut: 1 p
Tähelepaneku eest, et lõik KL on lõigust KN pikem parajasti ringjoonte keskpunktide vahelise kauguse võrra: 2 p
Lõigu KN pikkuse leidmise eest: 2 p
Värvitud osade pindala leidmise eest: 2 p

Kui arvutustes on arvu π asemel kasutatud selle lähisväärtust ja/või lõppvastus on antud ligikaudsena, siis anda kokku 1 punkt vähem. Kui lõppvastus on antud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda samuti 1 punkt vähem, kuid mõlema puuduse (ligikaudse π väärtuse kasutamine ja ühiku puudumine) korraga esinemisel nende eest mahavõetavaid punkte mitte liita (st anda ikkagi kokku 1 punkt vähem).

Ainult õige (täpse ja õige ühikuga) vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti, ligikaudse ja/või ühikuta vastuse eest 1 punkt.

3. Tähelepaneku eest, et avatud klappide arv muutub igal sammul paarisarvu võrra: 2 p
   Järelduse eest, et a)-osas ei ole klappide avamine võimalik: 2 p
   b)-osas sobiva klappide avamise strateegia kirjeldamise eest: 3 p

   Ainult täieliku õige vastuse (a) „ei“, b) „jah“) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

IX klass, I osa

1. Antud õige vastus 2003: 2 p

2. Märgitud õige vastus $y^3 + x^3$: 2 p
   Märgitud õige vastus $y^3 + x^3$ ja lisaks üks vale vastus: 1 p
   Leitud õigesti kõigi avaldiste väärtused või kirjutatud vastuseks vähima avaldise väärtus 0 (kuid ring on ümber tõmbamata): 1 p

3. Antud mõlemad õiged arvud 765 ja 234 (ükskõik kummas järjekorras): 2 p
   Antud üks kahest õigest arvust (teine puudub või on vale): 1 p

4. Antud õige vastus 8: 2 p

5. Antud õige vastus 13.30: 2 p

6. Antud mõlemad õiged vastused 2 ja 4 (ükskõik kummas järjekorras): 2 p
   Antud üks õige vastus: 1 p
   Antud mõlemad õiged vastused koos mõne sobimatu pikkusühikuga (näiteks 2 cm ja 4 cm): 1 p

7. Antud õige vastus 90° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p
   Antud vastuseks 90 ilma kraadimärgita: 1 p

8. Antud õige vastus 19: 2 p
   Antud vastuseks arv 19 koos mõne sobimatu pindalaühikuga (näiteks 19 cm^2): 1 p

9. Antud õige vastus: 2 p
   Õigetele tähtedele vastavusse seatud kaks või kolm neljast mõistest (ülejäänud on puudu või valed): 1 p

10. Kantud joonise kõigile kolmele tahule vastav õige arv (sõltumata sellest, mis pidi arvud on joonistatud): 2 p
    Kantud joonisele õigesti kaks kolmest arvust: 1 p

IX klass, II osa

1. Väikevenna, Karlssoni ja lihapallide kaalu siduva võrrandi koostamise eest: 2 p
   Näitamise eest, et tühja kõhuga Väikevend ja lihapallid kaaluvad kokku rohkem kui täis kõhuga Karlsson: 3 p
   Õige lõppjärelduse tegemise eest: 2 p

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 0 punkti.

2. a)-osa tingimust rahuldava arvu leidmise eest: 4 p
   b)-osa tingimust rahuldava arvu leidmise eest: 3 p

   Lahendustele, kus on toodud õige arv (ilma selgitusteta, kuidas see arv on saadud) ja kontrollitud, et selline arv tõepoolest rahuldab ülesande tingimusi, anda kummaski osas täispunktid.

   Kui sobivaid arve pole leitud, kuid on olemas idee otsida arvu, mis jaguks võimalikult paljudega arvudest 8, ..., 30, siis anda 2 punkti.

   Kui b)-osa on täielikult lahendatud, siis anda ka a)-osa eest täispunktid. Kui vastuseks on toodud nii a)- kui b)-osa tingimust rahuldav(ad) arv(ud) ilma igasuguse kontrollita, siis anda 2 punkti. Kui vastuseks on toodud ainult a)-osa tingimust rahuldav arv, siis anda 1 punkt. Ainult õige vastuse („jah“/„ei“) eest ilma põhjenduseta anda kummaski osas 0 punkti.

3. Puutuja ja raadiuse vaheliste täisnurkade leidmise või joonisel märkimise eest: 2 p
   Täisnurksete kolmnurkade võrdsuse põhjendamise eest: 3 p
   Tõestuse lõpuleviimise eest eest: 2 p

   Kui täisnurksete kolmnurkade võrdsus on mainitud ilma põhjenduseta, siis anda selle osa eest 1 punkt.

4. Esitame ühe hindamisskeemi, mille abil hinnata erinevaid lahendusviise, sh žürii lahendusi 1–3.

   Idee eest sammhaaval arve soovitud sihi suunas teisendada: 1 p
   Selliste käikude kirjeldamise eest, millega saab negatiivseid arve suurendada: 2 p
   Selliste käikude kirjeldamise eest, millega saab positiivseid arve vähendada: 2 p
   Selgituse eest, kuidas kõik arvud nulliks muuta: 2 p

   Käikude kirjeldamise eest anda punkte vaid juhul, kui käigud on sihileviivad, st neid on võimalik korrata, kuni kõik või peaaegu kõik (nagu žürii lahenduses 3) arvud on nulliks muudetud.

X klass

1. Sobiva võrrandi (näiteks $\sqrt{x} = x - 1$) koostamise eest: 2 p
   Ruutvõrrandiks teisendamise eest (žürii lahenduses 2 muutujavahetuse tegemise eest): 2 p
   Ruutvõrrandi lahendamise eest: 1 p
   Lahendite kontrolli ja võõrlahendi välistamise eest: 2 p

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt. Kui lisaks õigele vastusele on toodud ka mõni vale vastus, anda 0 punkti.

2. Avaldise murrukujule viimise eest: 2 p
   Murdude ühisele nimetajale viimise eest: 1 p
   Lugeja lihtsustamise eest: 2 p
   Antud seose abil näitamise eest, et lugeja võrdub nulliga: 2 p

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

3. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks faaside paaridesse jagamise abil (vt žürii lahendus 1) ning aritmeetilise summa valemi abil (žürii lahendus 2).

Lahendus faaside paaridesse jagamise abil.

Idee eest jagada faasid paaridesse, nii et ühes neist põleb samapalju tähti, kui teises on kustunud: 3 p

Järelduse eest, et igas paaris põlevate tähtede arvude summa on n: 1 p

Paaride arvu n leidmise eest: 2 p

Lõppvastuse n^2 leidmise eest: 1 p

Lahendus aritmeetilise jada summa valemi abil.

Põlevate tähtede arvu loetlemise eest igas faasis: 1 p

Nende arvude summa liikmete rühmitamise eest, nii et tekiksid aritmeetilised jadad: 2 p

Aritmeetilise jada summa valemi õige rakendamise eest kõigile neile jadadele: 3 p

Lõppvastuse leidmise eest: 1 p

Kui pärast algse summa väljakirjutamist on liikmeid rühmitatud kuidagi teisiti (nt $(0+n)+(1+(n-1))+\ldots+((n-1)+1)$), siis sihileviiva rühmitamise eest anda samuti 2 punkti ja summa leidmise ning lihtsustamise eest samuti kokku 4 punkti.

Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt. Kui on vaadeldud erijuhte väikeste n väärtuste korral, aga üldistust pole tehtud või on see põhjendamata, anda mitte üle 3 punkti.

4. a)-osa tingimust rahuldava arvu leidmise eest: 3 p

   Idee eest vaadelda b)-osas arvude 73, 38 ja 78 ühiskordseid: 2 p

   b)-osa tingimust rahuldava arvu leidmise eest: 2 p

   Lahendustele, kus on toodud õige arv (ilma selgitusteta, kuidas see arv on saadud) ja kontrollitud, et selline arv tõepoolest rahuldab ülesande tingimusi, anda kummaski osas täispunktid.

   Ainult sobiva vastuse eest ilma igasuguse kontrollita, miks selline arv sobib, anda kummaski osas 1 punkt.

5. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks võrdhaarsete kolmnurkade abil (vt žürii lahendus 1) ning kolmnurga teisendamise abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus võrdhaarsete kolmnurkade abil.

   Tähelepaneku eest, et kolmnurk ODE on võrdhaarne: 2 p

   Näitamise eest, et $\angle OGE = 90^\circ$: 2 p

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p

Lahendus kolmnurga teisendamise abil.

Idee eest vaadelda kolmnurga OAB külje AB keskpunkti I: 1 p
Näitamise eest, et $\angle OIB = 90°$: 1 p
Idee eest teisendada kolmnurk OIB kolmnurgaks OGE: 2 p
Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p

Kui lahenduses on vaadeldud mõnda teist samaväärset olukorda (näiteks kolmnurga ODE asemel kolmnurka OEF), siis hinnata analoogiliselt antud skeemidest lähtuvalt.

6. Selle ülesande kohta anname a)-osa jaoks eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks tsükli lühendamise abil (vt žürii lahendus 1) ning induktsiooni abil (žürii lahendus 2). b)-osa jaoks on hindamisskeem vaatamata lahendusviisile sama.

Lahendus tsükli lühendamise abil.

Idee eest koostada jada, kus igale õpilasele meeldib talle järgnev õpilane: 1 p
Tähelepaneku eest, et varem või hiljem valitakse mõni õpilane teist korda ja moodustub tsükkel: 2 p
Tähelepaneku eest, et tsükli pikkust saab lühendada, kuni jõutakse „õnneliku paarini“: 2 p
b)-osas sobiva kontranäite konstrueerimise eest : 2 p

Lahendus induktsiooni abil.

Idee eest kasutada induktsiooni: 1 p
Induktsiooni sammu eest: 4 p
b)-osas sobiva kontranäite konstrueerimise eest: 2 p

Induktsiooni idee eest anda punkt ka siis, kui sõna „induktsioon“ ei ole mainitud, kuid on selgelt väljendatud ideed vaadelda olukorda, mis tekib klassist ühe õpilase eemaldamisel.

Kui induktsiooni sammus on jäetud vaatlemata juht, kus induktsiooni eeldust otse kasutada ei saa (leidus poiss, kellele meeldis ainult väljajäetud tütarlaps), siis anda selle osa eest 1 punkt.

Ainult b)-osa õige vastuse „ei“ eest ilma lahenduseta anda 0 punkti.

XI klass

1. Õige võrrandisüsteemi koostamise eest: 2 p
Järelduse eest, et $a^2 = 1$: 1 p
Lahendipaari $a = 1$, $b = 1$ leidmise eest: 2 p

Lahendi $a = -1$ välistamise eest: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse $a = b = 1$ eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Kahekordse nurga siinuse valemi rakendamise eest: 1 p
   Nurga α võimalike suuruste leidmise eest: 1 p
   Kahekordse nurga koosinuse valemi rakendamise eest: 1 p
   Nurga β võimalike suuruste leidmise eest: 1 p
   Põhjendamise eest, et $\alpha = \beta = 45°$: 1 p
   Kolmnurga pindala leidmise eest: 2 p

   Kui vastus on toodud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda lahenduse eest kokku 1 punkt vähem.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt, kui vastus on antud õige ühikuga.

3. Juku kahtede ja viite arvu väljakirjutamise eest iga aasta jaoks ühe aasta kahtede arvu K ja viite arvu V abil: 1 p
   Lõpliku arvu K ja V võimalike väärtuste loetlemise eest (kasutades fakti, et K ja V on täisarvud ning fakti, et Juku ei saanud ühelgi aastal üle 300 hinde): 3 p
   Asjaolust, et Jukul oli 2003. aastal viisi esmakordselt rohkem kui kahtesid, sobivate võrratuste väljakirjutamise eest: 2 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 1 p

4. Võrduse $ab - 5b + a = n$ saamise eest: 1 p
   Järelduse eest, et a jagub b-ga ja $5b$ jagub a-ga: 3 p
   Tulemuse $a = 5b$ saamise eest: 2 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 1 p

5. Võrdsete nurkade EBA ja CAB leidmise eest võrdhaarse kolmnurga XAB abil: 1 p
   Võrdsete piirdenurkade ECA ja EBA leidmise eest: 1 p
   Võrdsete piirdenurkade CAB ja CEB leidmise eest: 1 p
   Järelduse eest, et sirged BE ja CD on paralleelsed: 2 p
   Järelduse eest, et $|CB| = |DE|$: 2 p

6. Ruudustiku sobiva värvimise eest: 3 p
   Atsi võitva strateegia kirjeldamise eest: 2 p
   Petsi ja Atsi saadavate šokolaaditükkide arvu kontrolli eest: 2 p

   Kui lahenduses on olemas idee kasutada mingisugustki värvimist, anda selle eest 1 punkt.

   Ainult õige vastuse „Ats“ eest ilma lahenduseta anda 0 punkti.

XII klass

1. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks aritmeetilise jada üldliikme valemi abil (vt žürii lahendus 1) ning aritmeetilise jada summa valemi abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus aritmeetilise jada üldliikme valemi abil.

Jada esimese viie liikme summa avaldamise eest esimese liikme ja jada vahe kaudu:	1 p
Jada kuuenda liikme avaldamise eest esimese liikme ja jada vahe kaudu:	1 p
Jada vahe avaldamise eest ainult esimese liikme kaudu:	2 p
Ainult jada esimest ja üheteistkümnendat liiget sisaldava seose saamise eest:	2 p
Jada esimese liikme leidmise eest:	1 p

   Lahendus aritmeetilise jada summa valemi abil.

Jada esimese viie liikme summale aritmeetilise jada summa valemi õige rakendamise eest:	1 p
Ainult jada esimest ja kuuendat liiget sisaldava seose saamise eest:	3 p
Ainult jada esimest ja üheteistkümnendat liiget sisaldava seose saamise eest:	2 p
Jada esimese liikme leidmise eest:	1 p

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks Viete'i valemite abil (vt žürii lahendus 1) ning võrrandisüsteemi lahendamise abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus Viete'i valemite abil.

Funktsiooni y tuletise leidmise eest:	2 p
Arusaamise eest, et $x = a$ ja $x = b$ on tuletise nullkohad:	1 p
Viete'i valemite rakendamise eest:	2 p
Lahendi $b = 0$ välistamise eest:	1 p
Õige lahendipaari leidmise eest:	1 p

   Lahendus võrrandisüsteemi abil.

Funktsiooni y tuletise leidmise eest:	2 p
Arusaamise eest, et $x = a$ ja $x = b$ on tuletise nullkohad:	1 p
Ainult üht muutujat sisaldava võrrandi (nt $75a^4 - 10a^3 - 5a^2 = 0$) saamise eest:	2 p
Õige lahendipaari leidmise eest:	2 p

Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt. Kui lisaks õigele vastusele on toodud ka mõni vale vastus, siis anda 0 punkti.

3. Teise veerandi viieliste, neljaliste ja kolmeliste õpilaste arvu avaldamise eest esimese veerandi vastavate õpilaste arvude a, b ja c kaudu: 1 p
   Arvude a, b ja c avaldamise eest ühe ühise muutuja kaudu: 3 p
   Gümnaasiumi õpilaste arvu üldkuju $102n+1$ (või sellega samaväärse kuju) leidmise eest: 2 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 1 p

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

4. Sulgude avamise eest: 1 p
   Järelduse eest, et $a-2$ jagub b-ga ja $2b+2$ jagub a-ga: 2 p
   Tulemuse $a = 2b+2$ saamise eest: 3 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 1 p

5. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus kasutatakse fakti, et nelinurk $AEDF$ on romb (vt žürii lahendus 1), ning lahenduste jaoks nurgapoolitaja omaduse abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus rombi $AEDF$ abil.

   Tähelepaneku eest, et nelinurk $AEDF$ on romb: 2 p
   Sarnaste kolmnurkade ECD ja FDB leidmise eest: 2 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p

   Lahendus nurgapoolitaja omaduse abil.

   Nurgapoolitaja omaduse rakendamise eest: 2 p
   Sarnaste kolmnurkade ABC ja FBD leidmise eest: 2 p
   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p

6. Vana reeglit rahuldavate paroolide arvu leidmise eest: 2 p
   Uut reeglit rahuldavate paroolide arvu leidmise eest sõltuvalt erisümbolite arvust x: 3 p
   Erisümbolite arvu x sisaldava võrratuse koostamise eest: 1 p
   Õige vähima erisümbolite arvu leidmise eest: 1 p

   Kui on võrreldud paroolide arvu kõikide erisümbolite arvu konkreetsete väärtuste 1 kuni 7 korral ja tehtud õige järeldus, anda täispunktid.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.