Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

VII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta avaldise $\dfrac{6+6\cdot 3-3}{3}$ väärtus.

   .....

2. Andres loetles kasvavas järjekorras kümme esimest algarvu. Milline algarv oli Andrese loetelus viimane?

   .....

3. Arvude $9x$ ja $2x$ vahe on 21. Leia $5x$ väärtus.

   .....

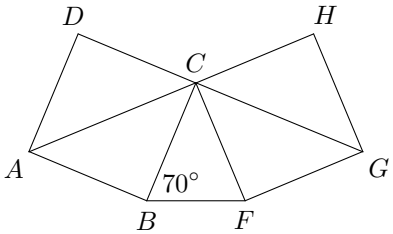
4. Mitu positiivset jagajat on arvul 24 (koos jagajatega 1 ja 24)?

   .....

5. Anna ostis siniseid ja kollaseid õhupalle. Sinised õhupallid andis ta oma kolmele sõbrannale, nii et igaüks neist sai kaks palli, kollased aga jättis Anna kõik endale. Mitu õhupalli Anna ostis, kui ta endale jättis 40% ostetud õhupallidest?

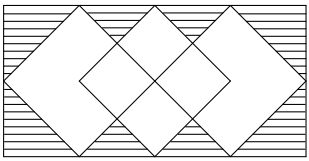
   .....

6. Ruudud $ABCD$ ja $CFGH$ on võrdsed ning $\angle CBF = 70^\circ$. Leia nurga ACG suurus.



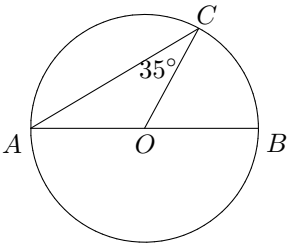
.....

7. Ristkülikusse on joonestatud kolm võrdset ruutu, kusjuures keskmise ruudu keskpunkt on äärmiste ruutude ühises tipus. Viirutamata osa kogupindala on $5\ \text{cm}^2$. Leia viirutatud osa pindala.



.....

8. Punkt O on ringjoone keskpunkt ning $\angle ACO = 35^\circ$. Leia nurga COB suurus.

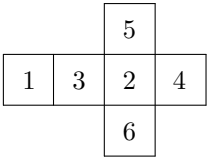


.....

9. Prismal on 8 tippu. Mitu serva on sellel prismal?

.....

10. Kuubi tahkudele on kirjutatud arvud 1 kuni 6. Joonisel on näidatud selle kuubi pinnalaotus. Leia ühise tipuga tahkudel olevate arvude korrutise suurim väärtus.



.....

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

VIII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia $\frac{3}{4}$ arvust, millest $\frac{5}{6}$ on 60.

   .....

2. Maria loetles kõik algarvud, mis on väiksemad arvust 32. Mitu algarvu ta sai?

   .....

3. Arvude $3a$ ja $8a$ aritmeetiline keskmine on 22. Leia a väärtus.

   .....

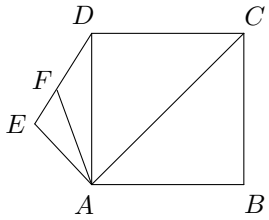
4. Arvude $1, 2, \ldots, 2004$ seast kustutati kõik sellised arvud x, mille korral $2005 - x$ jagub arvuga 3. Mitu arvu kustutati?

   .....

5. Uue telemängu esimest saadet jälgis 5000 inimest, kümnendat saadet aga 12000 inimest. Mitme protsendi võrra suurenes vaatajaskond?

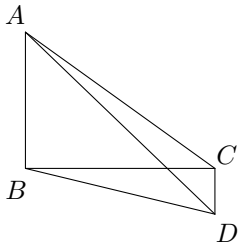
   .....

6. Joonisel on $ABCD$ ruut, lõik AF on nurga EAD poolitaja ning $\angle AED = 110^\circ$ ja $\angle FDA = 30^\circ$. Leia nurga FAC suurus.



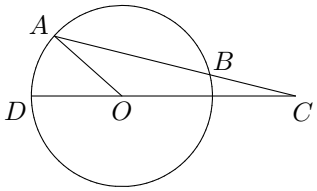
.....

7. Lõigud AB ja CD on risti lõiguga BC ning $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Mitu korda on kolmnurga ABD pindala suurem kolmnurga ADC pindalast?



.....

8. Punkt O on ringjoone keskpunkt ning $|BC| = |OA|$ ja $\angle ACO = 10^\circ$. Leia nurga AOD suurus.

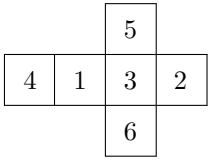


.....

9. Prismal on 6 tahku. Mitu tippu on sellel prismal?

.....

10. Kuubi tahkudele on kirjutatud arvud 1 kuni 6. Joonisel on näidatud selle kuubi pinnalaotus. Leia ühise tipuga tahkudel olevate arvude korrutise suurim väärtus.



.....

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

IX klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Nelja järjestikuse naturaalarvu summa on 138. Leia neist arvudest suurim.

   .....

2. Peeter kirjutas tahvlile kaheksa esimest algarvu kasvavas järjekorras. Millise numbri ta kirjutas kaheteistkümnendana?

   .....

3. Esimesel a päeval läbis rallisõitja k kilomeetrit päevas, ülejäänud b päeval aga m kilomeetrit päevas. Kui palju bensiini kulus autol kogu teekonna läbimiseks, kui keskmine bensiinikulu on x liitrit 100 kilomeetri kohta?

   .....

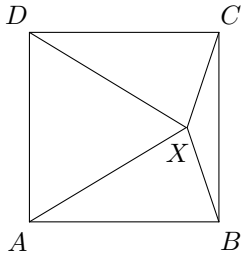
4. Arvude 1, 2, ..., 2004 seast kustutati kõik sellised arvud x, mille korral $2005 - x$ jagub arvuga 3. Mitu arvu jäi alles?

   .....

5. Firma suurendas oma toodete eksporti 1000% võrra. Mitu korda eksport suurenes?

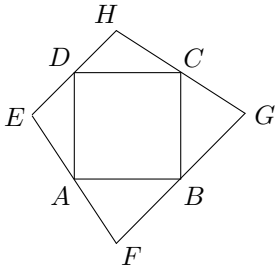
   .....

6. Ruudu $ABCD$ sees on võetud punkt X nii, et kolmnurk AXD on võrdkülgne. Leia nurga XBC suurus.



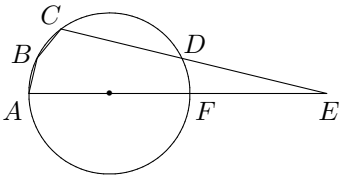
.....

7. Ruudu $ABCD$ tipud paiknevad võrdhaarse trapetsi $EFGH$ külgede keskpunktides ning ruudu pindala on $18\ \mathrm{cm}^2$. Leia trapetsi $EFGH$ pindala.



.....

8. Ringjoone diameetri AF ja kõõlu CD pikendused lõikuvad punktis E, kusjuures $|EF| = |FC|$ ja $\angle FED = 10^\circ$. Punkt B jagab kaare AC kaheks võrdseks osaks. Leia nurga ABC suurus.

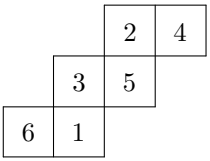


.....

9. Prismal on 12 serva. Mitu tahku on sellel prismal?

.....

10. Kuubi tahkudele on kirjutatud arvud 1 kuni 6. Joonisel on näidatud selle kuubi pinnalaotus. Leia ühise tipuga tahkudel olevate arvude korrutise suurim väärtus.



.....

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

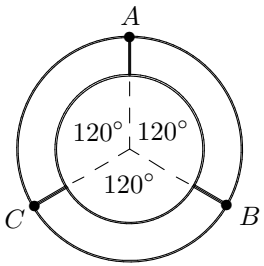
VII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised kolmekohalised paaritud naturaalarvud a, mille korrutis arvuga 748 lõpeb numbritega 2004.

2. Matemaatika test koosneb 30 algebra- ja 50 geomeetriaküsimusest. Rein vastas õigesti 80% testi kõikidest küsimustest, kusjuures algebraküsimustest vastas ta õigesti 70%. Mitmele geomeetriaküsimusele vastas Rein õigesti?

3. Kolm linna A, B ja C paiknevad ringteel, mis nende linnade kohal on ühendatud teise, väiksema ringteega nii, nagu joonisel näidatud. Kui pikk on lühim tee kahe linna vahel, kui suurema ringtee raadius on 60 km ning väiksema ringtee raadius on 40 km? (Joonisel punktiiriga näidatud lõigud ei ole teed.)



Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

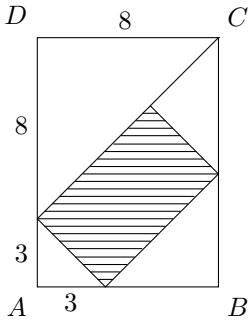
7. veebruaril 2004. a.

VIII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised kolmekohalised naturaalarvud, mis on ise mingi naturaalarvu ruuduks ning mille sajaliste numbri kustutamisel järelejääv kahekohaline arv on samuti mingi naturaalarvu ruut.

2. Leia ristküliku $ABCD$ sees paikneva viirutatud ristküliku pindala.



3. Jüri ja Mari elavad samas kõrghoones. Hoone igal korrusel on 10 korterit: esimesel korrusel on korterid 1, 2, ..., 10, teisel korrusel korterid 11, 12, ..., 20 jne. On teada, et Jüri korruse number on võrdne Mari korteri numbriga, kusjuures Jüri ja Mari korterite numbrite summa on 239. Leia Jüri korteri number.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

IX klass

II osa: Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Raudteerööpad on pikkusega 30 m, kusjuures mõlema rööpa liitekohad on kohakuti. Juku sõidab ühtlase kiirusega liikuvas rongis ning püüab määrata selle kiirust, loendades mingi ajavahemiku jooksul rööbaste liitekohtade ületamisel kostvaid kolkse. Millise aja jooksul peaks Juku kolkse loendama, et loendatud kolksude arv oleks võrdne rongi kiirusega km/h?

2. Leia kõik numbrid, millega võib lõppeda n esimese positiivse täisarvu summa.

3. Kaks ringjoont läbivad teineteise keskpunkte O_1 ja O_2 ning lõikuvad punktides A ja B. Tõesta, et sirge O_1B on kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone puutuja.

4. Mari ja Jüri mängivad n kõrvutiasetsevast ruudust ($n \geqslant 2$) koosneval mängulaual järgmist mängu. Kummalgi mängijal on üks nupp, mängu algul seisavad need mängulaua äärmistel ruutudel ning igal käigul liigutab mängija oma nuppu ühe või kahe ruudu võrra ükskõik kummas suunas. Käike tehakse vaheldumisi ning alustab Mari. Mängija, kes asetab oma nupu vastase nupuga samale ruudule, on võitnud. Milliste n väärtuste korral leidub võitev strateegia Maril ja milliste n väärtuste korral Jüril?

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

X klass

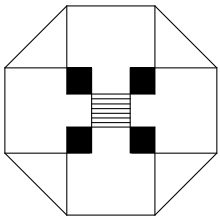
Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda ruutvõrrand $x^2 + 2ax + \sqrt{a^2 + 27} = 0$, kui on teada, et selle võrrandi lahendite summa on võrdne lahendite korrutisega.

2. Olgu $a = \dfrac{xy}{x+y}$, $b = \dfrac{yz}{y+z}$ ja $c = \dfrac{zx}{z+x}$, kus x, y, z on nullist erinevad reaalarvud. Avalda x arvude a, b ja c kaudu.

3. Kas leidub täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkused on täisarvud ning mille ümbermõõt on
   a) 2003;
   b) 2004?

4. Korrapärase kaheksanurga neljale küljele kaheksanurga sisse konstrueeritakse ruudud nagu joonisel näidatud. Nende ruutude lõikumisel tekib viis väiksemat ruutu, millest keskmine on joonisel viirutatud ja neli ülejäänut värvitud mustaks. Leia viirutatud ruudu pindala ja mustade ruutude kogupindala suhe.



5. Tõesta, et mistahes mittetäisnurkse kolmnurga ABC korral leiduvad sellised kolm ringjoont c_1, c_2 ja c_3, et ringjooned c_2 ja c_3 puutuvad üksteist punktis A, ringjooned c_3 ja c_1 punktis B ning ringjooned c_1 ja c_2 punktis C.

6. Asutuse juht on Eriti Tähtis Ametnik, kellel on n telefoni $(n \geqslant 2)$. Igale $m \geqslant 2$ telefoniga ametnikule alluvad vahetult kaks ametnikku, kellest ühel on $m-1$ ja teisel $m-2$ telefoni, kusjuures igal ametnikul peale Eriti Tähtsa Ametniku on täpselt üks vahetu ülemus.
   a) Leia telefonide koguarv asutuses juhul, kui $n = 10$.
   b) Tõesta, et iga $1 \leqslant k < n$ korral on k telefoniga ametnike arv asutuses võrdne $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnike koguarvuga.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu n naturaalarv. Tõesta, et arvudel $2^{n+6}+3^{n+6}+216(2^n+3^n)$ ja $4^{n+6}+5^{n+6}+8000\,(4^n+5^n)$ on 1-st suurem ühistegur.

2. Korrapärase n-nurga pikima diagonaali pikkus on l. Leia selle n-nurga pindala.

3. Täisnurkse kolmnurga kaatetitele tõmmatud mediaanide pikkused on $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. Leia selle kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

4. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB valitakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$, $|CE| = \frac{1}{3}|CA|$ ja $|AF| = \frac{1}{6}|AB|$. Olgu K lõikude BE ja CF lõikepunkt, L lõikude CF ja AD lõikepunkt ning M lõikude AD ja BE lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurga KLM pindala on võrdne kolmnurkade AFL, BDM ja CEK pindalade summaga.

5. Kas leiduvad sellised viis positiivset täisarvu, millest mistahes kahel on olemas 1-st suurem ühistegur, mistahes kolm on aga ühistegurita?

6. Mõõtmetega $m \times n$ ruudustiku $(m, n \geqslant 2)$ iga ruut on värvitud kas valgeks või mustaks. Ruudustiku kõrval asub põrnikas. Algul ronib põrnikas mingile ruudustiku ääreruudule ja muudab selle värvi vastupidiseks. Igal järgmisel sammul liigub põrnikas ruudult, kus ta parajasti on, edasi mingile naaberruudule (naaberruutudeks loeme ühist serva omavaid ruute) ning muudab selle värvi vastupidiseks. Lõpuks, olles järjekordselt jõudnud mingile ääreruudule, roomab põrnikas ruudustikult minema. Kas põrnikas saab niiviisi alati, olenemata ruudustiku algsest värvimisest, kõik ruudud mustaks värvida?

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu antud funktsioonid

$$f(x) = x^4 + (a^3 + b^3)x^3 + (a^2 + b^2)x^2 + (a + b)x + 2004 ,$$
$$g(x) = 4x^3 + 54x^2 + (2ab + 12)x + 2003 .$$

   Leia üks selline reaalarvude paar (a, b), mille korral g kasvab piirkondades, kus f graafik on nõgus, ning g kahaneb piirkondades, kus f graafik on kumer.

2. Ring on jaotatud neljaks erineva suurusega sektoriks. Iga sektor värvitakse ühega neljast kasutadaolevast värvist. Mitmel erineval viisil on võimalik need sektorid värvida nii, et iga kaks naabersektorit oleksid erinevat värvi (kõiki nelja värvi ei ole kohustuslik kasutada)?

3. Kujuta ristkoordinaadistikus kõigi nende punktide hulk, mille koordinaadid (x, y) rahuldavad tingimust $|2x - 1| + |2x + 1| + 2|y| = 4$.

4. Neljaliikmeline tenniseklubi soovib kohtumiseks oma sõprusklubiga välja valida klubi kaks parimat mängijat (nende omavaheline paremusvahekord pole oluline). On teada, et klubis ei ole kaht võrdse mängutasemega mängijat ning tugevam mängija võidab alati nõrgemat. Tõesta, et kahe parema mängija väljaselgitamiseks piisab neljast mängust.

5. Ringjooned c_1, c_2 ja c_3, mille keskpunktid on vastavalt A, B ja C, puutuvad üksteist paarikaupa väliselt, nii et ringjoonte c_2 ja c_3 puutepunkt on A', ringjoonte c_3 ja c_1 puutepunkt on B' ning ringjoonte c_1 ja c_2 puutepunkt on C'. Leia kolmnurga $A'B'C'$ sisenurkade suurused, kui kolmnurga ABC sisenurkade suurused on α, β ja γ.

6. Nimetame 0-ga mittelõppeva naturaalarvu M *peegelarvuks* arvu M', mis saadakse M numbrite kirjutamisel vastupidises järjekorras. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid 0-ga mittelõppevaid naturaalarve M, mis ei lange kokku oma peegelarvuga M' ning mille korral $M \cdot M'$ on mingi täisarvu ruut.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

VII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить значение выражения $\dfrac{6+6\cdot 3-3}{3}$.

   .....

2. Андрей перечислил в возрастающем порядке первые десять простых чисел. Какое простое число Андрей назвал последним?

   .....

3. Разность чисел $9x$ и $2x$ равна 21. Найти значение $5x$.

   .....

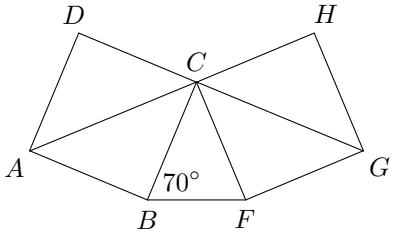
4. Сколько положительных делителей имеет число 24 (включая делители 1 и 24)?

   .....

5. Аня купила синие и желтые воздушные шарики. Синие шарики она раздала трем своим подругам так, что каждая подруга получила два шарика, а желтые шарики Аня все оставила себе. Сколько шариков купила Аня, если себе она оставила 40% от всех купленных шариков?

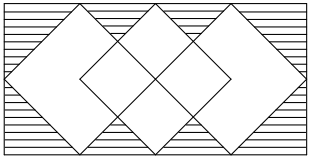
   .....

6. Квадраты $ABCD$ и $CFGH$ равны и $\angle CBF = 70^\circ$. Найти величину угла ACG.



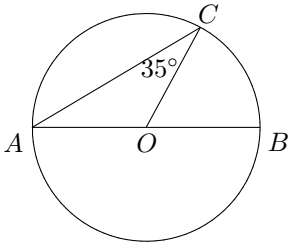
. . . . . .

7. В прямоугольник нарисованы три равных квадрата, причем центр среднего квадрата находится в общей вершине крайних квадратов. Общая площадь незаштрихованной части равна 5 см^2. Найти площадь заштрихованной части.



. . . . . .

8. Точка O является центром окружности и $\angle ACO = 35^\circ$. Найти величину угла COB.

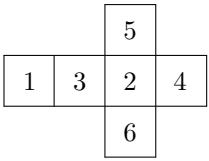


. . . . . .

9. Призма имеет 8 вершин. Сколько ребер у этой призмы?

. . . . . .

10. На гранях куба написаны числа от 1 до 6. На рисунке показана развертка этого куба. Найти наибольшее значение произведения чисел, находящихся на гранях с общей вершиной .



. . . . . .

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

VIII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти $\frac{3}{4}$ от числа, $\frac{5}{6}$ от которого составляет 60.

   .....

2. Маша перечислила все простые числа, которые меньше числа 32. Сколько простых чисел она назвала?

   .....

3. Среднее арифметическое чисел $3a$ и $8a$ равно 22. Найти значение a.

   .....

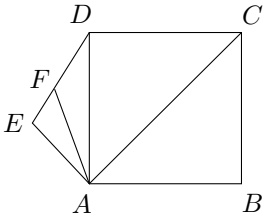
4. Из чисел $1, 2, \ldots, 2004$ вычеркнули все такие числа x, для которых $2005 - x$ делится на 3. Сколько чисел вычеркнули?

   .....

5. Первую передачу новой телеигры посмотрело 5000 человек, а десятую передачу 12000 человек. На сколько процентов увеличилась число зрителей?

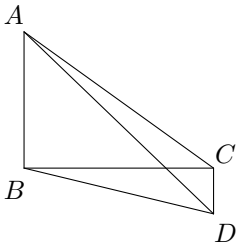
   .....

6. На рисунке $ABCD$ является квадратом, отрезок AF есть биссектриса угла EAD, $\angle AED = 110^\circ$ и $\angle FDA = 30^\circ$. Найти величину угла FAC.



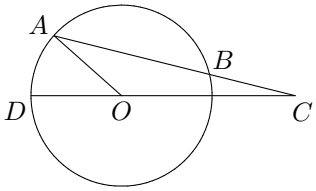
. . . . . .

7. Отрезки AB и CD перпендикулярны отрезку BC и $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Во сколько раз площадь треугольника ABD больше площади треугольника ADC?



. . . . . .

8. Точка O является центром окружности, $|BC| = |OA|$ и $\angle ACO = 10^\circ$. Найти величину угла AOD.

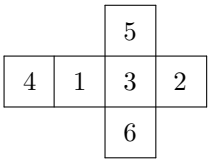


. . . . . .

9. Призма имеет 6 граней. Сколько вершин у этой призмы?

. . . . . .

10. На гранях куба написаны числа от 1 до 6. На рисунке показана развертка этого куба. Найти наибольшее значение произведения чисел, находящихся на гранях с общей вершиной .



. . . . . .

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

IX класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Сумма четырех последовательных натуральных чисел равна 138. Найти наибольшее из этих четырех чисел.

   .....

2. Петя написал на доске восемь первых простых чисел в возрастающем порядке. Какую цифру он написал двенадцатой?

   .....

3. Первые a дней участник ралли проезжал k километров в день, оставшиеся b дней m километров в день. Сколько бензина понадобилось автомобилю на всю дорогу, если средний расход бензина составляет x литров на 100 километров?

   .....

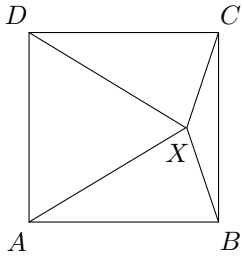
4. Из чисел $1, 2, \ldots, 2004$ вычеркнули все такие числа x, для которых $2005 - x$ делится на 3. Сколько чисел осталось?

   .....

5. Фирма увеличила экспорт своей продукции на 1000%. Во сколько раз увеличился экспорт?

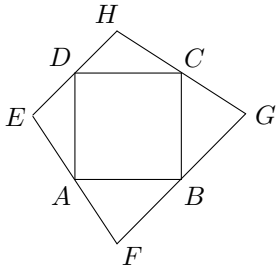
   .....

6. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка X так, что треугольник AXD равносторонний. Найти величину угла XBC.



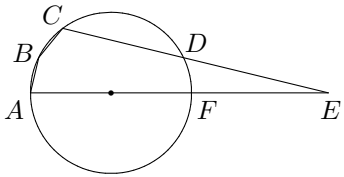
. . . . . .

7. Вершины квадрата $ABCD$ находятся в серединах сторон равнобедренной трапеции $EFGH$ и площадь квадрата равна 18 см^2. Найти площадь трапеции $EFGH$.



. . . . . .

8. Продолжения диаметра AF окружности и ее хорды CD пересекаются в точке E, причем $|EF| = |FC|$ и $\angle FED = 10^\circ$. Точка B делит дугу AC на две равные части. Найти величину угла ABC.

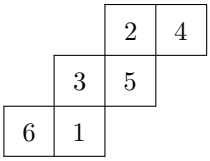


. . . . . .

9. Призма имеет 12 ребер. Сколько граней у этой призмы?

. . . . . .

10. На гранях куба написаны числа от 1 до 6. На рисунке показана развертка этого куба. Найти наибольшее значение произведения чисел, находящихся на гранях с общей вершиной .



. . . . . .

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

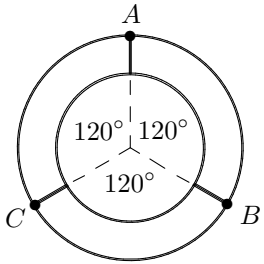
VII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие трехзначные нечетные натуральные числа a, произведение которых с числом 748 оканчивается цифрами 2004.

2. Математический тест состоит из 30 алгебраических и 50 геометрических вопросов. Рома ответил правильно на 80% всех вопросов теста, причем он ответил правильно на 70% алгебраических вопросов. На сколько геометрических вопросов Рома ответил правильно?

3. Три города A, B и C расположены на кольцевой дороге, которая в местах расположения городов соединена с другой, меньшей кольцевой дорогой так, как показано на рисунке. Какова длина наименьшего пути между двумя городами, если радиус большей кольцевой дороги равен 60 км, а радиус меньшей дороги равен 40 км? (Изображенные на рисунке пунктирные отрезки дорогами не являются.)



LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

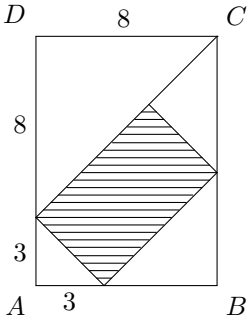
7 февраля 2004 г.

VIII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие трехзначные натуральные числа, которые сами являются квадратом некоторого натурального числа и для которых двузначное число, оставшееся после стирания цифры сотен, также является квадратом некоторого натурального числа.

2. Найти площадь заштрихованного прямоугольника, находяшегося внутри прямоугольника $ABCD$.



3. Юра и Маша живут в одном и том же многоэтажном доме. На каждом этаже дома находится 10 квартир: на первом этаже квартиры $1, 2, \ldots, 10$, на втором этаже квартиры $11, 12, \ldots, 20$ и т.д. Известно, что номер этажа Юры равен номеру квартиры Маши, причем сумма номеров квартир Юры и Маши равна 239. Найти номер квартиры Юры.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

IX класс

II часть: Время, отводимое для решения: 4 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Железнодорожные рельсы имеют длину 30 м, причем стыки обоих рельсов расположены напротив друг друга. Коля едет в поезде, движущемся с равномерной скоростью, и пытается определить эту скорость, подсчитывая количество стуков колес на стыках рельсов за некоторый промежуток времени. На протяжении какого времени Коля должен считать стуки колес, чтобы насчитанное количество стуков оказалось равным скорости поезда в км/ч?

2. Найти все цифры, на которые может заканчиваться сумма n первых положительных целых чисел.

3. Две окружности проходят через центры друг друга O_1 и O_2 и пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая O_1B является касательной окружности, описанной около треугольника O_1O_2A.

4. Маша и Юра играют на игровом поле, состоящем из рядом расположенных n клеток ($n \geqslant 2$), в следующую игру. У каждого игрока имеется одна фишка, в начале игры фишки установлены на крайних клетках игрового поля и на каждом ходу игрок передвигает свою фишку на одну или две клетки в любом направлении. Ходы делаются по очереди и начинает Маша. Выигрывает игрок, который поставит свою фишку на клетку, занимаемую фишкой противника. При каких значениях n имеется выигрышная стратегия у Маши и при каких значениях n у Юры?

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

X класс

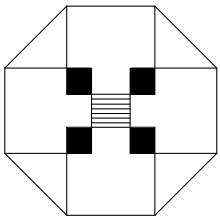
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 2ax + \sqrt{a^2+27} = 0$, если известно, что сумма корней этого уравнения равна произведению этих же корней.

2. Пусть $a = \dfrac{xy}{x+y}$, $b = \dfrac{yz}{y+z}$ и $c = \dfrac{zx}{z+x}$, где x, y, z отличные от нуля действительные числа. Выразить x через числа a, b и c.

3. Найдется ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого являются целыми числами и периметр которого равен
   а) 2003;
   б) 2004?

4. На четырех сторонах правильного восьмиугольника во внутреннюю сторону построены квадраты, как показано на рисунке. При пересечении этих квадратов возникают пять меньших квадратов, средний из которых на рисунке заштрихован, а остальные четыре закрашены черным цветом. Найти отношение площади заштрихованного квадрата к общей площади черных квадратов.



5. Доказать, что для любого непрямоугольного треугольника ABC найдутся такие три окружности c_1, c_2 и c_3, что окружности c_2 и c_3 будут касаться друг друга в точке A, окружности c_3 и c_1 в точке B, а окружности c_1 и c_2 в точке C.

6. Начальник учреждения, Особо Важный Чиновник имеет n телефонов ($n \geqslant 2$). Каждому чиновнику, имеющему $m \geqslant 2$ телефонов, непосредственно подчиняются два чиновника, у одного из которых $m-1$, а у другого $m-2$ телефонов, причем каждый чиновник, кроме Особо Важного Чиновника, имеет ровно одного непосредственного начальника.
   а) Найти общее число телефонов в учреждении в случае, если $n = 10$.
   б) Доказать, что для любого $1 \leqslant k < n$ число чиновников, имеющих k телефонов, равно общему числу чиновников, имеющих $k+1$ и $k+2$ телефонов.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть n натуральное число. Доказать, что числа $2^{n+6}+3^{n+6}+216(2^n+3^n)$ и $4^{n+6}+5^{n+6}+8000\,(4^n+5^n)$ имеют общий делитель, больший чем 1.

2. Длина наибольшей диагонали правильного n-угольника равна l. Найти площадь этого n-угольника.

3. Длины медиан, проведенных к катетам прямоугольного треугольника, равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

4. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC берут соответственно точки D, E и F так, что $|BD|=\frac{1}{2}|BC|$, $|CE|=\frac{1}{3}|CA|$ и $|AF|=\frac{1}{6}|AB|$. Пусть K точка пересечения отрезков BE и CF, L точка пересечения отрезков CF и AD, а M точка пересечения отрезков AD и BE. Доказать, что площадь треугольника KLM равна сумме площадей треугольников AFL, BDM и CEK.

5. Найдутся ли пять положительных целых чисел таких, что у любых двух из них имеется общий делитель, больший чем 1, а никакие три из них не имеют общего делителя?

6. Каждая клетка клетчатой доски размера $m\times n$ $(m,n\geqslant 2)$ покрашена либо в черный, либо в белый цвет. Рядом с доской находится жук. Сначала жук ползет на какую-нибудь крайнюю клетку доски и изменяет ее цвет на противоположный. При каждом очередном шаге жук перемещается с клетки, на которой он находится, на какую-нибудь соседнюю с ней клетку (соседними считаются клетки, имеющие общее ребро) и изменяет ее цвет на противоположный. Наконец, достигнув в очередной раз какой-нибудь крайней клетки, жук уползает с доски. Может ли жук таким способом всегда, независимо от первоначальной раскраски доски, перекрасить все клетки в черный цвет?

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть даны функции

$$f(x) = x^4 + (a^3 + b^3)x^3 + (a^2 + b^2)x^2 + (a + b)x + 2004\,,$$
$$g(x) = 4x^3 + 54x^2 + (2ab + 12)x + 2003\,.$$

Найти одну такую пару действительных чисел (a, b), для которых g возрастает в областях, где график f вогнутый, и g убывает в областях, где график f выпуклый.

2. Круг разделен на четыре разных по величине сектора. Каждый сектор закрашивают одним из четырех имеющихся цветов. Сколькими различными способами возможно покрасить эти сектора так, чтобы каждые два соседних сектора были бы разного цвета (использовать все четыре цвета не обязательно)?

3. Изобразить в прямоугольной системе координат множество всех таких точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют условию $|2x - 1| + |2x + 1| + 2|y| = 4$.

4. Теннисный клуб, имеюший четыре члена, желает выбрать для встречи с дружеским клубом двух своих лучших игроков (кто из этих двух игроков лучше, не существенно). Известно, что в клубе нет двух равных по уровню игроков и более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Доказать, что для выявления двух лучших игроков достаточно провести четыре игры.

5. Окружности c_1, c_2 и c_3, центры которых соответственно A, B и C, попарно касаются друг друга снаружи, так что A' точка касания окружностей c_2 и c_3, B' точка касания окружностей c_3 и c_1 и C' точка касания окружностей c_1 и c_2. Найти величины внутренних углов треугольника $A'B'C'$, если величины внутренних углов треугольника ABC равны α, β и γ.

6. Назовем число M' *зеркальным числом* натурального числа M, не оканчивающегося на 0, если оно получено путем написания цифр числа M в противоположном порядке. Доказать, что найдется бесконечно много таких натуральных чисел M, не оканчивающихся на 0, которые не совпадают со своим зеркальным числом M' и для которых $M \cdot M'$ является квадратом некоторого целого числа.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 7. 2. 29. 3. 15. 4. 8. 5. 10. 6. 130°. 7. 3 cm^2. 8. 70°. 9. 12. 10. 48.

VII klass, II osa

1. *Vastus:* ainus selline arv on 123.

   Tähistades esialgu a küsimärkidega, moodustame korrutamistehte

$$
\begin{array}{r}
? ? ? \cdot 7\,4\,8 \\
\hline
. \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \\
\hline
. \; . \; . \; 2\,0\,0\,4
\end{array}
$$

   Arvu a viimasel kohal peab olema number, mille korrutis 8-ga lõpeb numbriga 4. Sellised numbrid on 3 ja 8, kuid teine neist ei sobi, sest arv a peab olema paaritu. Niisiis lõpeb a numbriga 3 ja esimese punktiiri kohal on arv $3 \cdot 748 = 2244$. Arvu a teisel kohal peab olema selline number, mille korrutis 8-ga lõpeb numbriga 6, sest liites tulemusele arvu 2244 eelviimase numbri, peame saama 0-ga lõppeva arvu. Vajaliku omadusega on numbrid 2 ja 7 ning teise punktiiri kohal on siis vastavalt arv $2 \cdot 748 = 1496$ või $7 \cdot 748 = 5236$. Kui arvu a teisel kohal on 2, siis saame analoogilise arutlusega korrutise lõpust kolmanda numbri suhtes, et arvu a esimesele kohale võivad sobida numbrid 1 ja 6, seega $a = 123$ või $a = 623$. Kui arvu a teisel kohal on 7, siis võivad esimesele kohale sobida numbrid 3 ja 8, millega leiame veel kaks kandidaati $a = 373$ ja $a = 873$. Kuid neist neljast arvust annab ainult $a = 123$ korrutise, mille lõpust neljas number on 2.

2. *Vastus:* 43.

Rein vastas õigesti 80% testi 80 küsimusest, seega vastas ta õigesti $0{,}8 \cdot 80 = 64$ küsimusele. Nende hulgas oli algebraküsimusi $0{,}7 \cdot 30 = 21$. Järelikult vastas Rein õigesti $64 - 21 = 43$ geomeetriaküsimusele.

3. *Vastus:* $40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit.

Lahendus 1. Kui sõita ühest linnast teise otse mööda välimist ringteed, siis läbitakse vahemaa $60 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 40\pi$ kilomeetrit. Kui aga sõita kõigepealt sisemisele ringteele, mööda selle kaart teise linna kohale ja tagasi välimisele ringteele, siis läbitakse vahemaa $20 + 40 \cdot \dfrac{2\pi}{3} + 20 = 40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit. Esimese ja teise tee pikkuste vahe on $40\pi - 40 - \dfrac{80\pi}{3} = 40\dfrac{\pi}{3} - 40$ kilomeetrit. Et aga $\dfrac{\pi}{3} > 1$, siis on see vahe positiivne ehk esimene tee on pikem. On selge, et iga muu võimalik tee on pikem esimesest või teisest vaadeldud teest, seega on lühima tee pikkus $40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit.

Lahendus 2. Ühest linnast teise sõiduks on kaks mõistlikku teed — mööda välimise ringtee 120° kaart või mööda sisemise ringtee 120° kaart ning kaht ringteid ühendavat teelõiku — kõik ülejäänud võimalikud teed on ilmselt pikemad kui üks neist kahest. Vaadeldavate kaarte pikkused on vastavalt $60 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 40\pi$ ja $40 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{80\pi}{3}$ ning nende vahe on $40\pi - \dfrac{80\pi}{3} = 40 \cdot \dfrac{\pi}{3}$ kilomeetrit. Kahe ringteid ühendava lõigu kogupikkus $2 \cdot 20 = 40$ kilomeetrit on sellest vahest väiksem (sest $\pi > 3$) ning vaadeldav liikumisvariant mööda sisemist ringteed on seega lühem.

VIII klass, I osa

1. 54. 2. 11. 3. 4. 4. 668. 5. 140%. 6. 65°. 7. 3. 8. 30°. 9. 8. 10. 48.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 225 ja 625.

   Lahendus 1. Olgu a^2 otsitav kolmekohaline arv ja b^2 temast sajaliste numbri kustutamisel saadud kahekohaline arv. Seejuures $10 \leqslant a \leqslant 31$ ja $4 \leqslant b \leqslant 9$. Arv $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ peab jaguma 100-ga. Et arvud $a+b$ ja $a-b$ on sama paarsusega, siis on nad mõlemad paarisarvud. Samuti jaguvad mõlemad arvud 5-ga, sest kui jaguks ainult üks, siis peaks see arv jaguma 50-ga, mis pole võimalik a ja b suuruse tõttu. Seega $a+b$ ja $a-b$ jaguvad 10-ga ning ka nende summa $2a$ jagub 10-ga, mistõttu a jagub 5-ga. Kõne alla tulevad seega $a = 10$, $a = 15$, $a = 20$, $a = 25$ ja $a = 30$, kuid $10^2 = 100$, $20^2 = 400$ ja $30^2 = 900$ ei sobi, sest pärast sajaliste numbri kustutamist ei jää järele kahekohaline arv, $15^2 = 225$ ja $25^2 = 625$ aga sobivad.

   Lahendus 2. Kolmekohalised on parajasti arvude 10 kuni 31 ruudud. Arvutades need välja, saame 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961. Nendest arvudest jääb ainult 225 ja 625 puhul pärast sajaliste numbri kustutamist alles kahekohaline täisruut.

   Lahendus 3. Kahekohalised on parajasti arvude 4 kuni 9 ruudud: 16, 25, 36, 49, 64 ja 81. Vaadates läbi neile arvudele kõikvõimalike sajaliste numbrite lisamisel tekkivad kolmekohalised arvud, näeme, et täisruudud on neist ainult 225 ja 625.

2. *Vastus:* 30.

   Lahendus 1. Et tipu A juures asuv täisnurkne kolmnurk kaatetitega 3 ja 3 on võrdhaarne, siis on kõigi joonisel esinevate teravnurkade suurus 45°. Viirutatud ristküliku pindala saame, lahutades ristküliku $ABCD$ pindalast nelja võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindalad. Ristküliku $ABCD$ pindala on $8 \cdot 11 = 88$. Tippude A, B ja D juures asuvate võrdhaarsete täisnurksete kolmnurkade pindalad on vastavalt $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5$, $\frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5$ ja $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32$. Neljandas kolmnurgas on hüpotenuusi pikkus $11 - 5 = 6$ ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus 3, mistõttu selle kolmnurga pind-

ala on $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Seega saame viirutatud ristküliku pindalaks $88 - 4{,}5 - 12{,}5 - 32 - 9 = 30$.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et kõigi joonisel esinevate teravnurkade suurus on 45°. Seega on ka tipu B juures asuv täisnurkne kolmnurk võrdhaarne ning tema mõlema kaateti pikkus on $8 - 3 = 5$. Viirutatud ristküliku küljepikkused on seega $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ ning selle ristküliku pindala on $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 30$.

3. *Vastus:* 217.

Lahendus 1. Olgu Jüri korteri number n ning Mari korteri number (ja ühtlasi Jüri korruse number) m. Et m. korrusel asuvad korterid numbritega $10m - 9$ kuni $10m$, siis $10m - 9 \leqslant n \leqslant 10m$ ning $11m - 9 \leqslant n + m \leqslant 11m$. Et $n + m = 239$, saame siit Mari korteri numbri m jaoks võrratused $m \leqslant \frac{239 + 9}{11} = \frac{248}{11}$ ning $m \geqslant \frac{239}{11}$. Ainsa täisarvuna rahuldab neid võrratusi $m = 22$ ning Jüri korteri numbriks on siis $n = 239 - 22 = 217$.

Lahendus 2. Olgu Mari korteri number m, siis Jüri korter asub m. korrusel ning selle number on $10(m - 1) + k$, kus k on ühekohaline arv. Jüri ja Mari korterinumbrite summa on siis $10(m - 1) + k + m = 239$, kust $11m + k = 249$. On lihtne kontrollida, et ainus ühekohaline arv k, mille korral $249 - k$ jagub 11-ga, on $k = 7$. Siis $m = 22$ ning Jüri korteri numbriks saame $239 - 22 = 217$.

IX klass, I osa

1. 36. 2. 9. 3. $\frac{(ak + bm)x}{100}$ liitrit. 4. 1336. 5. 11. 6. 15°. 7. 36 cm^2. 8. 160°. 9. 6. 10. 48.

IX klass, II osa

1. *Vastus:* 108 sekundi jooksul.

Lahendus 1. Kui rong sõidab x kilomeetrit tunnis, siis ta läbib sekundis $x \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{x}{3{,}6}$ meetrit ja y sekundi jooksul katab rong vahemaa $\frac{xy}{3{,}6}$ meetrit. See teelõik moodustab $\frac{xy}{3{,}6 \cdot 30} = \frac{xy}{108}$ rööpapikkust ning järelikult kuuleb Juku y sekundi jooksul $\frac{xy}{108}$ kolksu (eeldades, et ta alustab kuulamist mitte täpselt kolksu hetkel, vaid kahe kolksu vahepeal). Selleks, et kolksude arv võrduks rongi kiirusega kilomeetrites tunnis, peab kehtima võrdus $\frac{xy}{108} = x$, millest $y = 108$.

Lahendus 2. Olgu rongi kiirus x km/h, siis ühe tunni jooksul läbib rong x km ehk ületab $\frac{x \cdot 1000}{30}$ rööbast. Niisiis ületab rong x rööbast $\frac{30}{1000}$ tunni ehk $\frac{30 \cdot 3600}{1000} = 108$ sekundi jooksul — s.t. kui Juku kuulab kolkse 108 sekundi jooksul, siis on selle aja jooksul kuuldavate kolksude arv x võrdne rongi kiirusega km/h.

2. *Vastus:* 0, 1, 3, 5, 6 või 8.

Lahendus 1. Paneme kõigepealt tähele, et summa viimane number oleneb ainult liidetavate viimastest numbritest, seega võime arvude 1, 2, ..., n asemel liita nende viimased numbrid. Leiame summa $1 + 2 + \ldots + n$ viimased numbrid $n = 1, 2, \ldots, 10$ korral — need on vastavalt 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5. Et $1 + 2 + \ldots + 9 + 0 = 45$, siis vaadeldava summa viimased numbrid $n = 11, 12, \ldots, 20$ korral saame eespool loetletutest 5 liitmisel, s.t. need on vastavalt 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0, ning edasi hakkavad samad viimased numbrid 20 kaupa tsükliliselt korduma (sest summa $1 + 2 + \ldots + 9 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 + 0$ lõpeb 0-ga). Järelikult saab vaadeldava summa viimane number olla 0, 1, 3, 5, 6 või 8 ning ei saa olla 2, 4, 7 ega 9.

Lahendus 2. Vaatleme summat $1+2+\ldots+n$. Jätame igast liidetavast alles ainult üheliste numbri. Järelejäänud summast tõmbame maha kõik liidetavate paarid 1 ja 9, 2 ja 8, 3 ja 7 ning 4 ja 6. Alles jääb teatud arv liidetavaid 5 ja võib-olla veel arvud 1, 2, 3, 4. Seega on esimese n positiivse täisarvu summa viimane

number sama mis arvu $5k$, $5k+1$, $5k+1+2$, $5k+1+2+3$ või $5k+1+2+3+4$ viimane number, kus k on täisarv. Esimest tüüpi arvud annavad viimaseks numbriks 0 või 5, teist tüüpi arvud 1 või 6, kolmandat tüüpi arvud 3 või 8, neljandat tüüpi arvud 6 või 1 ja viiendat tüüpi arvud 0 või 5.

Lahendus 3. Et $1+2+\ldots+n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, siis selle summa viimane number on pool arvu n^2+n jagamisel 20-ga tekkivast jäägist. Et arvule n mingi 20 kordse liitmine n^2+n jagamisel 20-ga tekkivat jääki ei muuda, siis piisab vaadelda n väärtusi 1, 2, $\ldots$, 20. Vastavad arvutused on esitatud järgmises tabelis:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \pmod{100}$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	0
$n^2+n \pmod{20}$	2	6	12	0	10	2	16	12	10	10
$\dfrac{n^2+n}{2} \pmod{10}$	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5

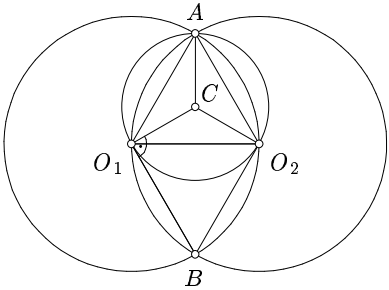
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$n^2 \pmod{100}$	21	44	69	96	25	56	89	24	61	0
$n^2+n \pmod{20}$	12	16	2	10	0	12	6	2	0	0
$\dfrac{n^2+n}{2} \pmod{10}$	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

Siit näeme, et arvu $\dfrac{n^2+n}{2}$ ehk summa $1+2+\ldots+n$ võimalikud viimased numbrid on 0, 1, 3, 5, 6 ja 8.

3. *Lahendus 1.* Kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed (vt. joonist 1), sest nende kõik küljed on sama pikad kui ringjoonte ühine raadius O_1O_2. Olgu C kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone keskpunkt. Kuna võrdkülgses kolmnurgas nurgapoolitajad ja külgede keskristsirged langevad kokku, siis lõik CO_1 poolitab kolmnurga O_1O_2A tipu O_1 juures oleva nurga, mistõttu $\angle CO_1O_2 = 30^\circ$. Seega

$$\angle CO_1B = \angle CO_1O_2 + \angle O_2O_1B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ\ .$$

Näeme, et sirge O_1B ristub kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone punktis O_1 selle ringjoone raadiusega CO_1, mis tähendabki, et O_1B puutub (punktis O_1) mainitud ringjoont.



Joonis 1

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed, mistõttu O_1BO_2A on romb ning sirge O_1B on paralleelne võrdkülgse kolmnurga O_1O_2A küljega O_2A. Et võrdkülgses kolmnurgas kõrgused ja külgede keskristsirged langevad kokku, siis kolmnurga O_1O_2A tipust O_1 küljele O_2A tõmmatud kõrgus läbib selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkti ning sellega ristiolev sirge O_1B on järelikult ümberringjoone puutuja.

Lahendus 3. Nagu eelmistes lahendusteski paneme kõigepealt tähele, et kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed. Siit $\angle O_2AO_1 = \angle O_2O_1B$. Vastavalt teoreemile puutuja ja kõõlu vahelisest nurgast on sirge O_1B kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone puutuja.

4. *Vastus:* kui ruutude arv n avaldub kujul $n = 3k$ või $n = 3k + 2$, siis leidub võitev stateegia Maril; kui aga $n = 3k + 1$, siis Jüril.

Kui $n = 3k$ või $n = 3k+2$, siis liigutagu Maril esimesel käigul oma nuppu vastavalt kahe või ühe ruudu võrra edasi. Sellega saavutab Mari olukorra, kus ruutude arv, mis tal oma nupuga Jüri nupuni jõudmiseks tuleks astuda, jagub 3-ga. Edasi saab Mari kasutada järgmist strateegiat: kui Jüri käib oma nupuga ühe või kahe ruudu võrra Mari nupu poole, siis liigutab Mari oma nuppu vastavalt

kahe või ühe ruudu võrra Jüri nupule vastu; kui aga Jüri käib ühe või kahe ruudu võrra Mari nupust eemale, siis liigutab Mari oma nuppu sama arvu ruutude võrra Jüri nupule järele. Pärast Jüri iga käiku on kaugus Mari ja Jüri nuppude vahel 3-ga mittejaguv arv, kuid pärast Mari iga vastust 3-ga jaguv arv. Et Mari nupp läheneb iga käiguga Jüri-poolsele lauaotsale ning Jüri nupp jääb alati Mari nupu ja selle lauaotsa vahele, siis saab nuppude kauguseks pärast Mari käiku varem või hiljem vähim 3-ga jaguv mittenegatiivne täisarv — null.

Kui $n = 3k + 1$, siis võidab Jüri, sest tal on ülalvaadeldud võiduseis: enne vastase (Mari) käiku on kaugus nuppude vahel 3-ga jaguv arv.

X klass

1. *Vastus:* $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

   Määrates antud ruutvõrrandi lahendite summa ja lahendite korrutise Viète'i valemite järgi, saame võrrandi $-2a = \sqrt{a^2 + 27}$. Ruutu tõstes leiame $4a^2 = a^2 + 27$ ehk $a^2 = 9$, millest $a = \pm 3$. Lähtevõrrandit rahuldab ainult lahend $a = -3$. Asetades a väärtuse algsesse ruutvõrrandisse, saame võrrandi $x^2 - 6x + 6 = 0$, mille lahendid on $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

2. *Vastus:* $x = 2abc/(bc - ca + ab)$.

   Lahendus 1. Ülesande tingimustest saame, et $\dfrac{1}{a} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ ning analoogiliselt $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ ja $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}$. Siit leiame

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{ab + bc - ca}{2abc}$$

   ning $x = \dfrac{2abc}{ab + bc - ca}$.

   Lahendus 2. Avaldades antud seostest vastavalt x, y ja z, saame:

   $$x = \frac{ay}{y - a}, \tag{1}$$

$$y = \frac{bz}{z-b}\,, \tag{2}$$

$$z = \frac{cx}{x-c}\,. \tag{3}$$

Asendades võrdusse (1) kõigepealt (2) ja seejärel (3), saame

$$x = \frac{ay}{y-a} = \frac{a\dfrac{bz}{z-b}}{\dfrac{bz}{z-b}-a} = \frac{abz}{bz-az+ab} =$$

$$= \frac{ab\dfrac{cx}{x-c}}{(b-a)\dfrac{cx}{x-c}+ab} = \frac{abcx}{bcx-acx+abx-abc}\,.$$

Siit $abc = x(ab+bc-ca)-abc$ ehk $2abc = x(ab+bc-ca)$, kust $x = \dfrac{2abc}{ab+bc-ca}$.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Kehtigu täisarvude a, b, c jaoks Pythagorase teoreemi võrdus $a^2+b^2=c^2$. Iga arv on oma ruuduga sama paarsusega; samuti on iga arv ja tema vastandarv sama paarsusega. Seega arvud a ja a^2 on sama paarsusega, b ja b^2 on sama paarsusega ning c ja $-c^2$ on sama paarsusega. Järelikult $a+b+c$ ja $a^2+b^2-c^2=0$ on sama paarsusega, s.t. $a+b+c$ on paarisarv ega saa võrduda 2003-ga.

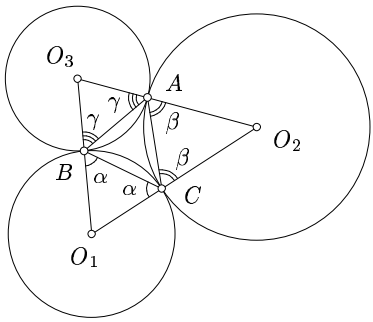
b) Arvestades, et $2004 = 12\cdot 167$, vaatleme kolmnurka küljepikkustega 3, 4 ja 5, mille puhul $3^2+4^2=5^2$ ja $3+4+5=12$. Suurendades selle kolmnurga küljepikkusi 167 korda, saame kolmnurga küljepikkustega $3\cdot 167$, $4\cdot 167$ ja $5\cdot 167$, mis rahuldab ülesande tingimusi.

4. *Vastus:* $1:2$.

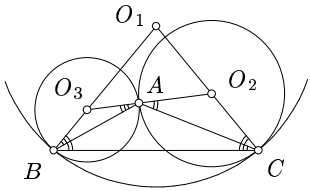
Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kaheksanurga küljepikkus on 1. Kaheksanurga küljele toetuva ruudu küljepikkus on siis samuti 1, küljele toetuva võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti pikkus aga $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Joonisel mustaks värvitud ruudu küljepikkus

on seega $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ ning viirutatud ruudu küljepikkus $1 - 2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - 1$. Viirutatud ruudu ja musta ruudu küljepikkuste suhe on järelikult $\sqrt{2} : 1$ ning nende pindalade suhe on $2 : 1$. Viirutatud ruudu pindala suhe nelja musta ruudu kogupindalasse on siis $2 : 4$ ehk $1 : 2$.

5. *Lahendus 1.* Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Siis $|OA| = |OB|$. Vaatleme kiiri OA ja OB. Et kolmnurk ABC pole täisnurkne, siis $\angle AOB \neq 180°$. Järelikult leidub ringjoon c_3, mis puutub kiiri OA ja OB vastavalt punktides A ja B. Analoogiliselt leidub ringjoon c_1, mis puutub kiiri OB ja OC vastavalt punktides B ja C, ning ringjoon c_2, mis puutub kiiri OC ja OA vastavalt punktides C ja A. Kuna c_2 ja c_3 puutuvad kiirt OA punktis A, puutuvad nad punktis A ka omavahel; analoogiliselt puutuvad c_3 ja c_1 omavahel punktis B ning c_1 ja c_2 omavahel punktis C.



Joonis 2



Joonis 3

Lahendus 2. Olgu α, β ja γ kolmnurga ABC sisenurkade suurused. Kui ABC on teravnurkne kolmnurk (vt. joonist 2), siis valime väljaspool kolmnurka sellised punktid O_1, O_2 ja O_3, et kehtiksid võrdused $\angle O_1BC = \angle O_1CB = \alpha$, $\angle O_2CA = \angle O_2AC = \beta$ ja $\angle O_3AB = \angle O_3BA = \gamma$. Sirge O_1O_2 läbib punkti C, sest $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, analoogiliselt läbib sirge O_2O_3 punkti A ja sirge O_3O_1 punkti B. Kui nüüd joonestada ringjoon keskpunktiga O_1 läbi tippude B ja C, ringjoon keskpunktiga O_2 läbi tippude

C ja A ning ringjoon keskpunktiga O_3 läbi tippude A ja B, siis puutuvad need kolm ringjoont paarikaupa.

Kui ABC on nürinurkne kolmnurk nürinurgaga näiteks tipu A juures (vt. joonist 3), siis tuleb punkt O_1 valida nii, et $\angle O_1BC = \angle O_1CB = \beta + \gamma$, edasine arutlus jääb samaks.

6. *Vastus:* a) 364.

Lahendus 1. Lahendame kõigepealt ülesande b)-osa. Et $k \geqslant 1$, siis on asutuses igal $k+1$ või $k+2$ telefoniga ametnikul üks k telefoniga vahetu alluv. Teiselt poolt, et $k < n$, siis on igal k telefoniga ametnikul üks $k+1$ või $k+2$ telefoniga vahetu ülemus. Seega on kõik k telefoniga ametnikud üksüheses vastavuses kõigi $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnikega, mistõttu k telefoniga ametnikke on sama palju kui $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnikke kokku.

Ülesande a) osas nimetatud juhul on asutuses kümme telefoni 1 ametnikul, üheksa telefoni samuti 1 ametnikul ning b) osa põhjal on kaheksa telefoni $1+1=2$ ametnikul, seitse telefoni $1+2=3$ ametnikul, kuus telefoni $2+3=5$ ametnikul, viis telefoni 8 ametnikul, neli telefoni 13 ametnikul, kolm telefoni 21 ametnikul, kaks telefoni 34 ametnikul ja üks telefon 55 ametnikul. Kokku on asutuses telefone seega $10\cdot1+9\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+6\cdot5+5\cdot8+4\cdot13+3\cdot21+2\cdot34+1\cdot55=364$.

Lahendus 2. a) Olgu A_n telefonide koguarv asutuses, milles Eriti Tähtsal Ametnikul on n telefoni. Need telefonid jagunevad kolmeks: A_{n-1} telefoni, mis kuuluvad selle allasutuse töötajatele, mida juhib Eriti Tähtsa Ametniku $n-1$ telefoniga vahetu alluv, A_{n-2} telefoni, mis kuuluvad selle allasutuse töötajatele, mida juhib tema $n-2$ telefoniga vahetu alluv, ning n telefoni, mis kuuluvad Eriti Tähtsale Ametnikule endale. Seega kehtib võrdus $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + n$. On lihtne näha, et $A_2 = 3$ (kahe telefoniga ametnikule allub üks ühe telefoniga ja üks ilma telefonita ametnik) ning $A_3 = 7$ (kolme telefoniga ametnikule allub kahe telefoniga ametniku juhitav allasutus ja ühe telefoniga ametnik). Edasi leiame $A_4 = 7+3+4 = 14$, $A_5 = 14+7+5 = 26$, $A_6 = 46$, $A_7 = 79$, $A_8 = 133$, $A_9 = 221$, $A_{10} = 364$.

b) Olgu $B(m,k)$ ühe m telefoniga ametniku alluvuses töötavate k telefoniga ametnike arv. Kehtivad järgmised seaduspärasused.

1) Kui $m \geqslant 2$ ja $m > k$, siis $B(m,k) = B(m-1,k) + B(m-2,k)$,

sest kõik m telefoniga ametnikule alluvad k telefoniga töötajad kuuluvad selle ametniku $m-1$ telefoniga vahetu alluva või $m-2$ telefoniga vahetu alluva juhitavasse allasutusse.

2) Kui $k \geqslant 1$, siis $B(m+1,k+1) = B(m,k)$, sest kui $m+1$ telefoniga ametniku juhitava allasutuse igalt töötajalt üks telefon ära võtta ning senised telefonita töötajad koondada, siis muutuvad $k+1$ telefoniga töötajad k telefoniga töötajateks, kes alluvad m telefoniga ametnikule.

Nüüd saame $B(n,k+2)+B(n,k+1) = B(n-1,k+1)+B(n,k+1) = B(n+1,k+1) = B(n,k)$.

XI klass

1. *Lahendus 1.* Et $216 = 2^3 3^3$ ja $8000 = 4^3 5^3$, siis võime avaldada

$$2^{n+6} + 3^{n+6} + 2^3 3^3 (2^n + 3^n) = (2^{n+3} + 3^{n+3})(2^3 + 3^3)\,,$$
$$4^{n+6} + 5^{n+6} + 4^3 5^3 (4^n + 5^n) = (4^{n+3} + 5^{n+3})(4^3 + 5^3)\,.$$

Arvudel $2^3 + 3^3 = 35$ ja $4^3 + 5^3 = 189$ on aga ühistegur 7.

Lahendus 2. Paneme tähele, et

$$2^{n+6}+3^{n+6}+216(2^n+3^n) = 2^n(2^6-1) + 3^n(3^6-1) + 217(2^n+3^n),$$
$$4^{n+6}+5^{n+6}+8000(2^n+3^n) = 4^n(4^6-1) + 5^n(5^6-1) + 8001(4^n+5^n).$$

Et arvud 2^6-1, 3^6-1, 4^6-1 ja 5^6-1 jaguvad kõik 7-ga, nagu ka arvud 217 ja 8001, siis 7 on otsitav ühistegur.

2. *Vastus:* $\dfrac{nl^2}{8}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$, kui n on paaris; $\dfrac{nl^2}{2}\cdot\cos\dfrac{180^\circ}{n}\cdot\tan\dfrac{90^\circ}{n}$, kui n on paaritu.

Tõmmates korrapärase n-nurga keskpunktist lõigu igasse tippu, näeme, et korrapärase n-nurga pindala avaldub ümberringjoone raadiuse r kaudu valemiga

$$S_n = n\frac{r^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Kui n on paarisarv, siis ühtib korrapärase n-nurga pikim diagonaal tema ümberringjoone diameetriga, ehk $l = 2r$, ning eelnev

pindala valem saab kuju

$$S_n = \frac{nl^2}{8} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Kui n on paaritu, siis vaatleme täisnurkset kolmnurka, mille hüpotenuusiks on korrapärase n-nurga ümberringjoone diameeter ja üheks kaatetiks pikim diagonaal. Nurk nende vahel on pool n-nurga küljele toetuvast piirdenurgast ehk pool nurgast $\frac{180^\circ}{n}$. Järelikult kehtib seos $l = 2r \cos \frac{90^\circ}{n}$ ning pindala valem omandab kuju

$$S_n = \frac{nl^2}{8} \cdot \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos^2 \frac{90^\circ}{n}} = \frac{nl^2}{2} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} \cdot \tan \frac{90^\circ}{n}.$$

3. *Vastus:* 2.

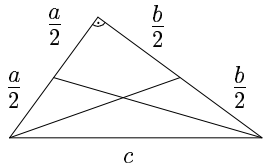
Olgu a ja b antud kolmnurga kaatetite pikkused ja c hüpotenuusi pikkus, kusjuures kaatetile pikkusega a on tõmmatud mediaan pikkusega $\sqrt{3}$. See mediaan on hüpotenuusiks täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetite pikkused on $\frac{a}{2}$ ja b (vt. joonist 4). Pythagorase teoreemi põhjal kehtib võrdus $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$. Analoogiliselt on mediaan pikkusega $\sqrt{2}$ hüpotenuusiks täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetite pikkused on a ja $\frac{b}{2}$, mistõttu kehtib ka võrdus $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. Liites saadud kaks võrdust, saame $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = 5$ ehk $a^2 + b^2 = 4$. Selle kolmnurga hüpotenuusi pikkus on niisiis $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

4. *Lahendus 1.* Et $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$, siis on kolmnurga ABD küljele AB tõmmatud kõrgus pool kolmnurga ABC kõrgusest ja

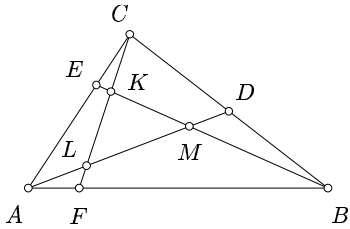
$S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Analoogiliselt $S_{ABE} = \frac{2}{3}S_{ABC}$. Lahutades siit eelmise võrduse, saame $S_{AME} - S_{BDM} = \frac{1}{6}S_{ABC}$. Lisaks $S_{AFC} = \frac{1}{6}S_{ABC}$. Lahutades eelmisest võrdusest selle, saame

$$S_{KLM} - S_{AFL} - S_{CEK} - S_{BDM} = 0,$$

millest järeldubki nõutav pindalade võrdsus.



Joonis 4



Joonis 5

Lahendus 2. Et $S_{ADC}+S_{BEA}+S_{CFB}-2S_{ADB}-2S_{BEC}-2S_{CFA} = 3S_{KLM}-3S_{AFL}-3S_{BDM}-3S_{CEK}$ (vt. joonist 5), siis avaldades vasakul esinevad pindalad kolmnurga ABC pindala kaudu, saame vasaku poole väärtuseks

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) S_{ABC} = 0.$$

Järelikult on ka võrduse parema poole väärtus 0.

5. *Vastus:* jah.

Valime hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ iga kaheelemendilise alamhulga $\{m, n\}$ jaoks ühe algarvu $p_{m,n}$ nii, et erinevatele alamhulkadele vastavad erinevad algarvud (samas loomulikult $p_{m,n} = p_{n,m}$). Defineerime arvud a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 järgmiselt:

$$a_i = p_{1,i} \cdot \ldots \cdot p_{i-1,i} \cdot p_{i+1,i} \cdot \ldots \cdot p_{5,i}$$

ehk arvu a_i algtegurid on parajasti need algarvud, mis vastavad elementi i sisaldavatele alamhulkadele. Nii saadud arvud rahulda-

vad ülesande tingimusi, sest mistahes paarikaupa erinevate indeksite r, s, t korral arvude a_r ja a_s suurim ühistegur on $p_{r,s} > 1$, kuid arvude a_s ja a_t suurim ühistegur on $p_{s,t} \neq p_{r,s}$, mistõttu kolme arvu a_r, a_s ja a_t suurim ühistegur on 1.

Märkus. Konkreetse näitena võime võtta

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ a_2 &= 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, \\ a_3 &= 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23, \\ a_4 &= 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29, \\ a_5 &= 7 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29. \end{aligned}$$

Igal kahel arvul leidub ühine algtegur, kuid ükski algtegur ei kuulu korraga kolme arvu koosseisu.

Ülaltoodud lahendust on lihtne üldistada viie positiivse täisarvu juhult n positiivse täisarvu juhule, kus $n \geqslant 3$ on suvaline.

6. *Vastus:* jah.

Astugu põrnikas esimesel sammul suvalisele ääreruudule A. Kui ruudustikus leidub mõni valge ruut B, mis erineb ruudust A, siis võib põrnikas liikuda selleni ja tulla sama teed pidi tagasi. Nii muutuvad ainult ruutude A ja B värvid, sest kõiki vahepealseid ruute külastab põrnikas paarisarv kordi. Nõnda jätkates on võimalik jõuda olukorrani, kus kõik ruudud peale A on mustad. Kui nüüd ka A on must, siis võib põrnikas kohe ruudustikult lahkuda. Kui A on valge, siis võib põrnikas teha kolmiksammu: astuda ruudu A kõrval asuvale ääreruudule C, tagasi ruudule A ning uuesti ruudule C, misjärel kõik ruudud on mustad.

XII klass

1. *Vastus:* sobib paar $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ või $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Meil tuleb valida kordajate a ja b väärtused nii, et alati, kui $f''(x) \geqslant 0$, oleks ka $g'(x) \geqslant 0$ ning alati, kui $f''(x) < 0$, oleks ka $g'(x) < 0$. Kindlasti kehtivad need tingimused siis, kui iga x

korral $f''(x) = g'(x)$. Et

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 + 6(a^3 + b^3)x + 2(a^2 + b^2), \\ g'(x) &= 12x^2 + 108x + 2ab + 12, \end{aligned}$$

siis see võrdus kehtib alati, kui $f''(x)$ ja $g'(x)$ avaldistes on x vastavate astmete kordajad võrdsed. Nii saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 6(a^3 + b^3) = 108 \\ 2(a^2 + b^2) = 2ab + 12 \end{cases},$$

mille võime teisendada kujule

$$\begin{cases} (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 18 \\ a^2 - ab + b^2 = 6 \end{cases}.$$

Siit saame, et $a + b = 3$. Asendades $b = 3 - a$ süsteemi teise võrrandisse, saame ruutvõrrandi $a^2 - a(3 - a) + (3 - a)^2 = 6$ ehk $a^2 - 3a + 1 = 0$, mille lahendid on $a = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ja $a = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Esimesel juhul on $b = 3 - \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$, teisel juhul aga $b = 3 - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

2. *Vastus:* 84.

Lahendus 1. Värvime kõigepealt mingid kaks teineteise vastas asuvat sektorit. Kui värvime need sektorid sama värviga (4 võimalust), siis võime mõlemad järelejäänud sektorid värvida suvalisega ülejäänud värvidest (kummagi sektori värvimiseks 3 võimalust). Seega on sel juhul värvimisvõimalusi $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Kui aga esmalt värvime kaks teineteise vastas asuvat sektorit eri värvidega ($4 \cdot 3$ võimalust), siis jääb kummagi ülejäänud sektori värvimiseks 2 värvi ning kokku on värvimisvõimalusi $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Kokku on sektorite värvimiseks niisiis $36 + 48 = 84$ võimalust.

Lahendus 2. Tähistame sektorid vastupäeva liikudes tähtedega A, B, C, D. Värvime kõigepealt sektori A, selleks on 4 võimalust.

Seejärel värvime sektori B erinevaks sektorist A, selleks on 3 võimalust. Sektori C värvimiseks sektorist B erinevaks on 3 võimalust ning sektori D värvimiseks sektorist C erinevaks samuti 3 võimalust. Seega saame nelja sektorit värvida $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ viisil. Kuid siit tuleb kõrvale jätta värvimisviisid, kus sektorid A ja D on ühte värvi. Niisuguste värvimisviiside arvu leidmiseks käsitleme sektoreid A ja D tinglikult ühe sektorina. Kolmeks sektoriks jaotatud ringis peavad kõik sektorid olema eri värvi, järelikult on värvimisvõimalusi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ringi nelja sektori värvimiseks, kus kõik sektorid on erinevat värvi, on võimalusi seega $108 - 24 = 84$.

Lahendus 3. Sektoreid on võimalik nõutaval viisil värvida, kasutades selleks kahte, kolme või nelja värvi.

Nelja värvi korral tuleb iga sektor värvida erineva värviga ning rohkem piiranguid sellisele värvimisele ei ole — esimese sektori värvi valikuks on meil seega 4 võimalust, teise sektori värvi valikuks 3 võimalust, kolmanda sektori värvi valikuks 2 võimalust ja neljanda sektori värvi valikuks üksainus võimalus ning kokku saame nelja värviga värvimiseks $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ võimalust.

Kolme värvi korral on meil kõigepealt 4 võimalust kasutamata jääva värvi valikuks. Edasi tuleb mingi värviga värvida 2 sektorit, mis ei tohi paikneda teineteise kõrval — selle värvi valikuks on 3 võimalust ning sellega värvitavate sektorite paari valikuks 2 võimalust. Et lõpuks on veel 2 võimalust värvida ülejäänud kaks sektorit kahe ülejäänud värviga, siis kokku on kolme värviga värvimiseks $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ võimalust.

Kahe värvi korral on meil kõigepealt $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ võimalust kasutatavate värvide valikuks. Et ühe valitud värviga tuleb värvida üks mitte-naabersektorite paar ja teisega teine, siis on selleks veel 2 võimalust ning kokku seega $6 \cdot 2 = 12$ võimalust.

Kokkuvõttes saime, et sektorite nõutaval viisil värvimiseks on $24 + 48 + 12 = 84$ erinevat võimalust.

3. *Vastus:* sellise kuusnurga rajajoon, mille tipud asuvad punktides $(-1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;0)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$.

Lahendus 1. Vaatleme eraldi kolme juhtu.

Kui $x \geqslant \frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = 2x+1$ ja $|2x-1| = 2x-1$ ning saame võrrandi $4x + 2|y| = 4$, kust $|y| = 2 - 2x$. Et $|y| \geqslant 0$, siis peab siin olema $x \leqslant 1$.
Kui $x \leqslant -\frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = -2x-1$ ja $|2x-1| = -2x+1$ ning saame võrrandi $-4x+2|y| = 4$, kust $|y| = 2+2x$. Et $|y| \geqslant 0$, siis peab siin olema $x \geqslant -1$.
Kui $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = 2x+1$ ja $|2x-1| = -2x+1$ ning saame võrrandi $2 + 2|y| = 4$, kust $|y| = 1$.
Näeme, et igaühel kolmest vaadeldud juhust paiknevad nõutava omadusega punktid kahel x-telje suhtes sümmeetrilisel lõigul ning kokku moodustavad need lõigud kuusnurga tippudega punktides $(-1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;0)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ (vt. joonist 6).

Lahendus 2. Otsitav punktihulk on sümmeetriline x-telje suhtes, sest kui punkt (x,y) rahuldab ülesandes antud tingimust, siis rahuldab seda ka punkt $(x,-y)$. Samuti on punktihulk sümmeetriline y-telje suhtes, sest kui punkt (x,y) rahuldab ülesande tingimust, siis rahuldab seda ka punkt $(-x,y)$, nagu nähtub võrdusest

$$|2(-x)-1| + |2(-x)+1| + 2|y| = |2x+1| + |2x-1| + 2|y|.$$

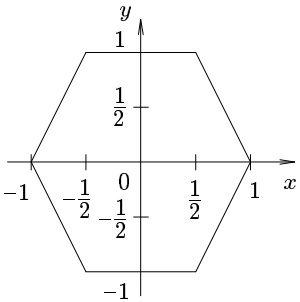
Seega piisab vaadelda punkte (x,y), kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Tingimus omandab sellisel juhul kuju $|2x-1| + 2x + 1 + 2y = 4$. Kui siin $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, siis $|2x-1| = 1-2x$ ning tingimus on

$$1 - 2x + 2x + 1 + 2y = 4$$

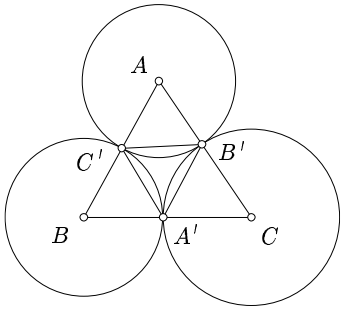
ehk $y = 1$. Kui $x \geqslant 1/2$, siis $|2x-1| = 2x-1$ ning tingimus on

$$2x - 1 + 2x + 1 + 2y = 4$$

ehk $y = 2-2x$. Nende kahe võrrandi järgi joonestame välja punktihulga tasandi I veerandis. Kujundi osad tasandi ülejäänud veerandites leiame peegeldamistega x- ja y-telje suhtes (vt. joonist 6).



Joonis 6



Joonis 7

4. Jagame mängijad kahte paari ning selgitame kummaski paaris võitja ja kaotaja. Seejärel mängib kummagi paari võitja teise paari kaotajaga ning nende kohtumiste võitjad ongi klubi kaks paremat. Tõepoolest, kui teise mängu võitja võitis ka esimeses kohtumises, siis kuulub ta kindlasti klubi kahe parema hulka, sest ta on võitnud kahte mängijat. Kui teise mängu võitja kaotas esimeses kohtumises, siis võitis ta teises mängus esimese mängu võitjat ja on sellega tugevam nii temast kui ka tema esimese mängu vastasest.

   Märkus. On võimalik tõestada, et n mängija hulgast m parema leidmiseks pole vaja rohkem kui $\binom{n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n-m}{2}$ mängu.

5. *Vastus:* $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ ja $90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$.

   Lahendus 1. Et kolmnurk $BA'C'$ on võrdhaarne tipunurgaga β (vt. joonist 7), siis $\angle BA'C' = \angle BC'A' = \dfrac{180^\circ - \beta}{2}$. Analoogiliselt saame $\angle CA'B' = \angle CB'A' = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2}$. Ringjoonte keskpunkte B ja C ühendav sirge läbib ringjoonte puutepunkti A'. Seepärast $\angle B'A'C' = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - \beta}{2} - \dfrac{180^\circ - \gamma}{2} = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$ ehk võrduse $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ tõttu $\angle B'A'C' = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Ülejäänud nurkade

suurused leiame samamoodi.

Lahendus 2. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning A'', B'' ja C'' siseringjoone puutepunktid vastavalt külgedega BC, CA ja AB. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = |AB| \\ y + z = |BC| \\ z + x = |CA| \end{cases}.$$

Sellel süsteemil on ühene lahend (x, y ja z saab üheselt avaldada $|AB|$, $|BC|$ ja $|CA|$ kaudu). Samal ajal on süsteemi lahendiks nii $x = |AB'| = |AC'|$, $y = |BC'| = |BA'|$, $z = |CA'| = |CB'|$ kui puutujalõikude võrdsuse põhjal ka $x = |AB''| = |AC''|$, $y = |BC''| = |BA''|$, $z = |CA''| = |CB''|$. Järelikult $A' = A''$, $B' = B''$ ja $C' = C''$. Seega lõigud IA', IB' ja IC' on risti vastavalt kolmnurga külgedega BC, CA ja AB, mistõttu $AB'IC'$, $BC'IA'$ ja $CA'IB'$ on kõõlnelinurgad. Siit $\angle B'A'C' = \dfrac{\angle B'IC'}{2} = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$ ning analoogiliselt $\angle C'B'A' = \dfrac{180^\circ - \beta}{2}$ ja $\angle A'C'B' = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2}$.

6. *Lahendus 1.* Pannes tähele, et $12^2 = 144$ ja $21^2 = 441$, moodustame arvud

$$\begin{aligned} M &= (10^n + 2)^2 = 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4 = 10\ldots040\ldots04, \\ M' &= (2 \cdot 10^n + 1)^2 = 4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1 = 40\ldots040\ldots01. \end{aligned}$$

Need arvud on ilmselt teineteise peegelarvud (kõik nullide rühmad koosnevad $n - 1$ nullist), samuti on nende korrutis täisruut, sest arvud ise on täisruudud.

Lahendus 2. Tõestame kõigepealt, et leidub neljakohaline arv, mille peegelarv on temast 4 korda suurem, st. kehtib seos $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Arvu kümnendkohtade määramiseks saame võrrandi

$$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a,$$

mille võime teisendada kujule

$$1333a + 130b - 20c - 332d = 0.$$

Siin a peab olema paarisarv ja $4a < 10$, seega $a = 2$. Sellest lähtudes saame edasi $d = 8$, $b = 1$ ja $c = 7$. Otsitav arv on järelikult 2178.

Olgu nüüd $M = 21782178\ldots2178$, kus arv 2178 on kirjutatud n korda järjest. Siis arv $M' = 4M = 87128712\ldots8712$ on parajasti arvu M peegelarv. Arvud M ja M' on ülesandes nõutud omadusega, sest $M \cdot M' = M \cdot 4M = (2M)^2$.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

Juhised lahenduste hindamiseks

Lp. hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (s.t. vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu kõigi teiste ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (s.t. ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a. testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

4. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

5. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

VII klass, I osa.

1. Antud õige vastus 7: 2 p.
   Antud vastuseks $\frac{21}{3}$: 1 p.

2. Antud õige vastus 29: 2 p.
   Vastuseks loetletud õiged 10 esimest algarvu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29: 1 p.

3. Antud õige vastus 15: 2 p.
   Märkus: õigeks lugeda ka vastus "15 või -15"

4. Antud õige vastus 8: 2 p.
   Vastuseks loetletud õiged jagajad 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24: 1 p.

5. Antud õige vastus 10: 2 p.
   Antud vastuseks 4 (endale jäetud õhupallide arv): 1 p.

6. Antud õige vastus 130° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p.
   Antud vastuseks 130 ilma kraadimärgita: 1 p.

7. Antud õige vastus 3 cm^2 (või sama pindala teistes ühikutes): 2 p.
   Antud vastuseks arv 3 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.
   Antud vastuseks 8 cm^2 või sama pindala teistes ühikutes (kogu ristküliku pindala): 1 p.

8. Antud õige vastus 70° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p.
   Antud vastuseks 70 ilma kraadimärgita: 1 p.

9. Antud õige vastus 12: 2 p.

10. Antud õige vastus 48: 2 p.
    Vastuseks loetletud õiged arvud 2, 4, 6 (mille korrutist küsiti): 1 p.

VII klass, II osa.

1. Arvu a võimalike lõpunumbrite 3 ja 8 leidmise eest: 1 p.

   Arvu a lõpunumbri 8 välistamise (tingimuse, et a on paaritu, ärakasutamise) eest: 1 p.

   Arvu a võimalike kümneliste numbrite 2 ja 7 leidmise eest: 2 p.

   Analüüsi lõpuleviimise ja õige lõppvastuse leidmise eest: 3 p.

   Ainult õige vastuse 123 eest ilma lahenduseta, kuid koos kontrolliga, et see arv sobib, anda 2 punkti. Kui ka kontroll puudub, siis anda ainult õige vastuse eest 1 punkt.

2. Õigesti vastatud algebraküsimuste arvu leidmise eest: 2 p.

   Õigesti vastatud küsimuste koguarvu leidmise eest: 3 p.

   Korrektse lõppvastuse (õigesti vastatud geomeetriaküsimuste arvu) leidmise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti.

3. Tähelepaneku eest, et on vaja võrrelda kahe tee pikkusi (mööda välimist ringteed ja sisemise ringtee kaudu): 1 p.

   Välimise ringtee kaare pikkuse leidmise eest: 1 p.

   Sisemise ringtee kaare pikkuse leidmise eest: 1 p.

   Võrdlemist vajavate arvude õige kirjapaneku eest: 2 p.

   Nende arvude õige võrdlemise ja lõppvastuse andmise eest: 2 p.

   Kui arvutustes on juba enne võrreldavate arvudeni jõudmist arvu π asemel kasutatud selle lähisväärtust ning pole selgitatud, miks see võrdluse tulemust ei mõjuta, ja/või lõppvastus on antud ligikaudsena, siis anda kokku 1 punkt vähem. Kui lõppvastus on antud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda samuti 1 punkt vähem, kuid mõlema puuduse (ligikaudse π väärtuse kasutamine ja ühiku puudumine) korraga esinemisel nende eest mahavõetavaid punkte mitte liita (s.t. anda ikkagi kokku 1 punkt vähem).

   Ainult õige (täpse ja õige ühikuga) vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti, ligikaudse ja/või ühikuta vastuse eest 1 punkt.

VIII klass, I osa.

1. Antud õige vastus 54: 2 p.

2. Antud õige vastus 11: 2 p.

   Vastuseks loetletud õiged algarvud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31: 1 p.

3. Antud õige vastus 4: 2 p.

4. Antud õige vastus 668: 2 p.

5. Antud õige vastus 140% või 140: 2 p.

6. Antud õige vastus 65° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p.

   Antud vastuseks 65 ilma kraadimärgita: 1 p.

7. Antud õige vastus 3: 2 p.

8. Antud õige vastus 30° (või $\frac{\pi}{6}$): 2 p.

   Antud vastuseks 30 ilma kraadimärgita: 1 p.

9. Antud õige vastus 8: 2 p.

10. Antud õige vastus 48: 2 p.

    Vastuseks loetletud õiged arvud 2, 4, 6 (mille korrutist küsiti): 1 p.

VIII klass, II osa.

1. Seda ülesannet saab lahendada lähtudes kolmekohalistest (vt. žürii lahendused 1 ja 2) või kahekohalistest (vt. lahendus 3) täisruututudest. Järgnevalt anname eraldi hindamisskeemid nende kahe erineva lahendusviisi jaoks.

Lahendus kolmekohalistest täisruutudest lähtudes:

Kolmekohaliste täisruutude õige leidmise või määratlemise (nt. "arvude 10 kuni 31 ruudud") eest:	2 p.
Ülejäänud arvude välistamise eest peale 100, 225, 400, 625 ja 900:	3 p.
Arvude 100, 400 ja 900 välistamise ning õige vastuse esitamise eest:	2 p.

Lahendus kahekohalistest täisruutudest lähtudes:

Kahekohaliste täisruutude õige leidmise või määratlemise (nt. "arvude 4 kuni 9 ruudud") eest:	2 p.
Kõikide tekkivate kolmekohaliste arvude läbivaatamise ning õige vastuse esitamise eest:	5 p.

Ainult õige vastuse eest (mõlemad õiged arvud) ilma lahenduseta anda 2 punkti, ühe õige arvu eest 1 punkt. Kui ilma lahenduseta antud vastus sisaldab lisaks *mõlemale* õigele arvule veel ka mõnd arvudest 100, 400 ja 900, siis anda 1 punkt, mõne muu vale arvu esinemise korral 0 punkti.

2. Seda ülesannet saab lahendada pindalade liitmise-lahutamise teel (vt. žürii lahendus 1) või viirutatud ristküliku küljepikkuste leidmise teel (vt. lahendus 2). Usutavasti kasutab enamik 8. klassi õpilasi küll esimest lahendusviisi — järgnevalt anname siiski eraldi hindamisskeemid nende mõlema lahendusviisi jaoks.

Lahendus pindalade liitmise-lahutamise teel:

Tähelepaneku eest, et suure ristküliku pindalast on vaja lahutada nelja täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindalad:	1 p.
Suure ristküliku pindala leidmise eest:	1 p.
Suure ristküliku tippude juures olevate 3 täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindalade leidmise eest:	2 p.
Neljanda täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindala leidmise eest:	2 p.
Õige lõppvastuse leidmise eest:	1 p.

Lahendus viirutatud ristküliku küljepikkuste leidmise teel:

Viirutatud ristküliku lühema külje pikkuse leidmise eest:	2 p.
Viirutatud ristküliku pikema külje pikkuse leidmise eest:	3 p.
Õige lõppvastuse leidmise eest:	2 p.

Pindalade liitmist-lahutamist on siin võimalik teha ka muul viisil (nt. viirutatud ristkülikut tükeldades) — selliste mittetäielike lahenduste hindamisel tuleb otsustada, kui suur osa vajalikest arvutustest, arvestades ka nende keerukust, on lahendajal õigesti tehtud.

Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti.

3. Sobivate võrratuste koostamise eest, mis seovad Jüri korruse numbrit (ehk Mari korteri numbrit) Jüri korteri numbriga või nende korterite numbrite summaga: 4 p.

   Jüri korruse numbri (ehk Mari korteri numbri) leidmise eest nende võrratuste abil: 2 p.

   Õige lõppvastuse andmise eest: 1 p.

   Vajalikud võrratused võivad lahenduses esineda ka varjatud kujul (nagu žürii lahenduses 2, kus võrratused $0 \leqslant k \leqslant 9$ peituvad sõnades "k on ühekohaline"). Kui on õigesti koostatud ainult üks vajalikest võrratustest (teine on vigane või puudub), siis anda selle osa eest 2 punkti. Kui võrratuste koostamisel või lahendamisel on eksitud ning saadud 1 võrra vale Jüri korruse number ning seeläbi ka 1 võrra vale lõppvastus, siis anda lahenduse eest kokku 2 punkti vähem.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 2 punkti.

IX klass, I osa.

1. Antud õige vastus 36: 2 p.

2. Antud õige vastus 9: 2 p.

3. Antud õige vastus $\dfrac{(ak+bm)x}{100}$: 2 p.

4. Antud õige vastus 1336: 2 p.

5. Antud õige vastus 11: 2 p.

6. Antud õige vastus 15° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p.
   Antud vastuseks 15 ilma kraadimärgita: 1 p.

7. Antud õige vastus 36 cm^2 (või sama pindala teistes ühikutes): 2 p.
   Antud vastuseks arv 36 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

8. Antud õige vastus 160° (või vastav väärtus radiaanides): 2 p.
   Antud vastuseks 160 ilma kraadimärgita: 1 p.

9. Antud õige vastus 6: 2 p.

10. Antud õige vastus 48: 2 p.
    Vastuseks loetletud õiged arvud 2, 4, 6 (mille korrutist küsiti): 1 p.

IX klass, II osa.

1. Sobiva arvutusidee esitamise eest: 2 p.
   Erinevatest ühikutest ja rööpa pikkusest tulenevate arvude (1000, 3600 ja 30) õige kasutamise eest arvutustes: 3 p.
   Arvutuste õige läbiviimise ja õige lõppvastuse leidmise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Sellele ülesandele anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lahendusviisi jaoks — lõpunumbrite tsüklilist kordumist kasutades (vt. žürii lahendused 1 ja 3) ning summas 10 andvaid numbrite paare kõrvale jättes (vt. lahendus 2).

   Lahendus lõpunumbrite tsüklilist kordumist kasutades:

   Tähelepaneku eest, et piisab vaadata n väärtusi 1 kuni 20, koos põhjendusega: 4 p.
   Lahenduse lõpuleviimise (võimalike lõpunumbrite leidmise) eest: 3 p.

Lahendus summas 10 *andvaid numbrite paare kõrvale jättes:*

Tähelepaneku eest, et arvude asemel võib liita nende viimaseid numbreid: 1 p.

Idee eest jätta kõrvale summas 10 andvad numbrite paarid : 2 p.

Allesjääva summa võimalike kujude õige leidmise eest : 2 p.

Lahenduse lõpuleviimise (võimalike lõpunumbrite leidmise) eest: 2 p.

Ainult täieliku õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt, mittetäieliku vastuse eest 0 punkti.

3. Tähelepaneku eest, et kolmnurgad AO_1O_2 ja BO_1O_2 on võrdkülgsed: 2 p.

   Selle tähelepaneku ärakasutamise eest tõestatava väite põhjendamiseks: 5 p.

4. Idee eest kasutada nuppude vahekauguse jaguvust 3-ga: 2 p.

   Selle idee alusel ühe mängija võitva strateegia kirjeldamise eest koos sobivate n väärtuste määratlemisega: 3 p.

   Selgitamise eest, miks ülejäänud juhtudel on teisel mängijal võitev strateegia: 2 p.

   Kui on vaadeldud ainult erijuhte väikeste n väärtuste korral ja need õigesti analüüsitud, kuid üldistust pole tehtud, anda lahenduse eest kokku mitte üle 3 punkti.

   Ainult täieliku õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt, mittetäieliku vastuse eest 0 punkti.

X klass

1. Parameetri a leidmiseks sobiva võrrandi koostamise eest: 2 p.

   Koostatud võrrandi lahendamise eest: 1 p.

   Võõrlahendi $a = 3$ välistamise eest: 2 p.

   Ruutvõrrandi lahendite leidmise eest $a = -3$ korral: 2 p.

   Ainult täieliku õige vastuse (mõlemad lahendid) eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks pöördarvude abil (vt. žürii lahendus 1) ning otseste asenduste abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus pöördarvude abil:

   Arvude $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{c}$ avaldamise eest $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ja $\frac{1}{z}$ kaudu: 2 p.

   Arvu x avaldamiseks sobiva võrduse saamise eest (mis sisaldab ainult x ning a, b ja c): 3 p.

   Arvu x avaldamise eest saadud võrdusest: 2 p.

   Lahendus otseste asenduste abil:

   Arvude x, y ja z avaldamise eest antud võrdustest asendamiseks sobival kujul: 2 p.

   Arvu x avaldamiseks sobiva võrduse saamise eest (mis sisaldab ainult x ning a, b ja c): 3 p.

   Arvu x avaldamise eest saadud võrdusest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

3. Osa a) eest (põhjendus, miks küljepikkuste summa ei saa olla 2003): 4 p.

   Osa b) eest (näide, et küljepikkuste summa saab olla 2004): 3 p.

4. Musta ruudu küljepikkuse leidmise eest: 2 p.

   Viirutatud ruudu küljepikkuse leidmise eest: 2 p.

   Lahenduse lõpuleviimise (nõutud suhte arvutamise) eest: 3 p.

   Märkus: õigeks lugeda vastus nii kujul $1 : 2$ kui ka ühe arvuna $\frac{1}{2}$ või 0,5.

5. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks antud kolmnurga ümberringjoone keskpunkti abil (vt. žürii lahendus 1) ning otsitavate ringjoonte keskpunktide konstrueerimise abil (žürii lahendus 2).

Lahendus antud kolmnurga ümberringjoone keskpunkti abil:

Idee eest kasutada antud kolmnurga ümberringjoone keskpunktist O lähtuvaid kiiri: 3 p.

Sobivate ringjoonte õige kirjeldamise eest koos põhjendusega, miks need eksisteerivad (viide lõikude OA, OB ja OC võrdsusele): 4 p.

Lahendus otsitavate ringjoonte keskpunktide konstrueerimise abil:

Otsitavate ringjoonte keskpunktide asukoha õige kirjelduse eest: 3 p.

Sobivate ringjoonte õige kirjeldamise eest koos põhjendusega, miks need eksisteerivad (viited punktide A, B ja C paiknemisele konstrueeritud keskpunkte ühendavatel lõikudel ning tekkivate uute kolmnurkade võrdhaarsusele): 4 p.

Kui pakutav konstruktsioon sobib esitatud kujul ainult teravnurkse või ainult nürinurkse kolmnurga jaoks ning teise juhu jaoks vajalikud modifikatsioonid (nagu žürii lahenduses 2) on mainimata, anda lahenduse eest kuni 5 punkti.

Õige üldjuhul sobiva konstruktsiooniga joonise eest ilma selgitusteta (kui konstruktsiooni idee on jooniselt selgesti näha) anda 3 punkti; ainult teravnurkse või ainult nürinurkse kolmnurga jaoks sobiva konstruktsiooni korral 2 punkti.

6. Osa a) eest (telefonide koguarv $n = 10$ korral): 2 p.

   Osa b) eest (väite tõestus üldjuhul): 5 p.

   Kui a) osa on õigesti lahendatud b) osa väidet kasutades, anda selle osa eest 2 punkti ka juhul, kui b) osa väide ise on tõestamata.

   Ainult a) osa õige vastuse 364 eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

XI klass

1. Antud avaldiste teisendamise eest kujule, kust on võimalik välja lugeda nende ühine tegur (nt. tegurite 2^3+3^3 ja 4^3+5^3 väljatoomise eest): 5 p.

Tegurdatud avaldiste ühise teguri leidmise eest: 2 p.

Ainult arvude 216 ja 8000 sobiva tegurdamise eest, kui lahendusega edasi ei ole mindud, anda 2 punkti.

Ainult õige ühisteguri 7 nimetamise eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Korrapärase n-nurga pindala avaldamise eest ümberringjoone raadiuse (või diameetri) kaudu: 2 p.

   Pindala avaldise leidmise eest pikima diagonaali kaudu juhul, kui n on paaris: 2 p.

   Pindala avaldise leidmise eest pikima diagonaali kaudu juhul, kui n on paaritu: 3 p.

   Vastustena lugeda õigeks mistahes kujul avaldised, mis annavad õige tulemuse, s.t. mitte punkte maha võtta selle eest, kui saadud avaldist pole maksimaalselt lihtsustatud.

   Kui pindala avaldis pikima diagonaali kaudu leitakse mingil sellisel viisil, mis ei kasuta pindala avaldamist ümberringjoone raadiuse või diameetri kaudu, siis anda õige avaldise leidmise eest paaris n jaoks 3 punkti ja paaritu n jaoks 4 punkti.

   Ainult õige vastuse eest (mõlemad juhud) ilma lahenduseta anda 1 punkt, ainult paaris või paaritu juhu vastuse eest 0 punkti.

3. Idee eest vaadelda täisnurkseid kolmnurki, millele vaadeldavad mediaanid on hüpotenuusiks: 2 p.

   Pythagorase teoreemist tulenevate võrduste kirjapaneku jaoks nendes kolmnurkades: 2 p.

   Lahenduse lõpuleviimise (hüpotenuusi pikkuse leidmise) eest: 3 p.

   Kui lõpuleviimata lahenduses on hindamisskeemi kahes esimeses lõigus mainitut tehtud ainult ühe nimetatud kolmnurga korral (pikkusega $\sqrt{2}$ või $\sqrt{3}$ mediaani jaoks), siis anda nende osade eest kummastki 1 punkt.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

4. Pindalade vahe $S_{KLM} - S_{AFL} - S_{CEK} - S_{BDM}$ (või selle komponentide) avaldamise eest kolmnurkade ADB, ADC, BEA, BEC, CFA ja CFB pindalade kaudu: 4 p.

   Vajaminevate kolmnurkade ADB, ADC, BEA, BEC, CFA ja CFB pindalade avaldamise eest kolmnurga ABC pindala kaudu: 2 p.

   Tõestuse lõpuleviimise eest: 1 p.

5. Idee eest konstrueerida otsitavad arvud sobivalt valitud algarvude korrutistena: 1 p.

   Toimiva konstruktsiooni kirjeldamise eest, või sobivate arvude loetlemise eest algteguriteks lahutatutena: 4 p.

   Põhjenduse või kontrolli eest, miks see konstruktsioon (või esitatud arvud) rahuldavad ülesande tingimusi: 2 p.

   Ainult 5 sobiva arvu loetlemise eest algteguriteks lahutamata kujul ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Ainult õige vastuse "jah" eest ilma lahenduseta anda 0 punkti.

6. Selgituse eest, kuidas põrnikas saab ümber värvida suvalise ühe ruudu, mis on erinev lähteruudust, millele ta kõigepealt ronib: 2 p.

   Järeldamise eest, et põrnikas saab värvida mustaks kõik valged ruudud peale lähteruudu: 2 p.

   Näitamise eest, kuidas põrnikas saab lõpetada oma liikumise nii, et ka lähteruut jääb kokkuvõttes mustaks: 3 p.

   Võib arvata, et selle ülesande jaoks pakutakse välja ka selliseid liikumisalgoritme, kus põrnikas ei pöördu kogu aeg tagasi ühele lähteruudule. Kui selline lahendus on mittetäielik, siis selle hindamiseks tuleks välja selgitada, kas pakutavat algoritmi on üldse võimalik täiendada üldjuhul toimivaks ning kui on, siis kui suur osa sellest on lahendajal tehtud.

   Ainult õige vastuse "jah" eest ilma lahenduseta anda 0 punkti.

XII klass

1. Arusaamise eest, et $f''(x)$ ja $g'(x)$ peavad olema samamärgilised: 1 p.

   Teise tuletise $f''(x)$ avaldise leidmise eest: 1 p.

   Tuletise $g'(x)$ avaldise leidmise eest: 1 p.

   Sobiva parameetrite paari (a, b) leidmise eest: 4 p.

   Kui lahendaja on väljendanud arusaamist, et võime nõuda $f''(x)$ ja $g'(x)$ avaldistes vastavate x kordajate võrdsust, siis anda talle hindamisskeemi viimase osa eest vähemalt 1 punkt.

   Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

2. Seda ülesannet on ilmselt võimalik lahendada paljudel erinevatel viisidel. Järgnevas esitame näiteks hindamisskeemid, lähtudes kolmest žürii väljapakutud lahendusest — mistahes mittetäielikku lahendust võiks püüda kõrvutada ühega neist, määramaks lahenduse olemasolevate ja puuduvate komponentide kaalu ja sellest tulenevat punktide arvu.

   Lahendus vastasasuvate sektoripaaride kaudu (lahendus 1):

   Idee eest värvida sektoreid vastasasuvate paaride kaupa: 1 p.

   Värvimiste arvu leidmise eest, kui esimene sektorite paar värvida ühte värvi: 3 p.

   Värvimiste arvu leidmise eest, kui esimene sektorite paar värvida erinevat värvi: 3 p.

   Lahendus sektorite järjetikuse värvimise kaudu (lahendus 2):

   Idee eest värvida sektoreid järjest ning lahutada hiljem maha nende värvimiste arv, kus esimene ja viimane sektor on sama värvi: 2 p.

   Värvimiste arvu leidmise eest, arvestamata esimese ja viimase sektori värvide võimalikku kokkulangemist: 2 p.

   Mahalahutatava värvimiste arvu ja lõppvastuse leidmise eest: 3 p.

Lahendus erineva värvide arvuga värvimiste kaudu (lahendus 3):

Idee eest loendada värvimisi kasutatava värvide arvu järgi:	1 p.
Värvimiste arvu leidmise eest, kus kasutatakse kõiki 4 värvi:	2 p.
Värvimiste arvu leidmise eest, kus kasutatakse 3 värvi:	2 p.
Värvimiste arvu leidmise eest, kus kasutatakse 2 värvi:	2 p.

Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

3. Ka seda ülesannet on ilmselt võimalik lahendada paljudel erinevatel viisidel. Järgnevas esitame näiteks hindamisskeemid, lähtudes kahest žürii väljapakutud lahendusest — mistahes mittetäielikku lahendust võiks püüda kõrvutada ühega neist, määramaks lahenduse olemasolevate ja puuduvate komponentide kaalu ja sellest tulenevat punktide arvu.

Lahendus $2x-1$ ja $2x+1$ erinevate märgikombinatsioonide vaatlemise kaudu (lahendus 1):

Idee eest vaadelda erinevaid juhte olenevalt $2x-1$ ja $2x+1$ märkidest:	1 p.
Ühe juhu vaatlemise eest, kus $2x-1$ ja $2x+1$ on sama märgiga ($x \leqslant -\frac{1}{2}$ või $x \geqslant \frac{1}{2}$):	2 p.
Teise juhu vaatlemise eest, kus $2x-1$ ja $2x+1$ on sama märgiga:	1 p.
Juhu vaatlemise eest, kus $2x-1<0$ ja $2x+1>0$:	2 p.
Õige lõppvastuse kirjeldamise või joonisel esitamise eest:	1 p.

Lahendus sümmeetria kaudu (lahendus 2):

Tähelepaneku eest, et vaadeldav punktihulk on sümmeetriline x-telje suhtes:	1 p.
Näitamise eest, et vaadeldav punktihulk on sümmeetriline ka y-telje suhtes:	2 p.
Juhu vaatlemise eest, kus $x \geqslant \frac{1}{2}$ (või analoogiline juht mõnes muus tasandi veerandis):	2 p.

Juhu vaatlemise eest, kus $x \leqslant \frac{1}{2}$ (või analoogiline juht mõnes muus tasandi veerandis): 1 p.

Õige lõppvastuse kirjeldamise või joonisel esitamise eest: 1 p.

Ainult õige joonise eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4. Õige idee eest 4 mängu korraldamiseks: 3 p.

   Selgituse eest, kuidas nende mängude põhjal kaks paremat mängijat välja valida, koos selgitusega, miks see alati õige tulemuse annab: 4 p.

   Kui selgituses on vaatlemata jäetud juht, kui teise mängu võitja esimese mängu kaotas, anda lahenduse eest kokku mitte üle 4 punkti. Kui selgituses on vaatlemata jäetud juht, kui teise mängu võitja ka esimese mängu võitis, anda lahenduse eest kokku mitte üle 6 punkti.

5. Selle ülesande kohta anname eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus leitakse kolmnurga ABC tippude juurde moodustuvate võrdhaarsete kolmnurkade nurgad (vt. žürii lahendus 1), ning lahenduste jaoks kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunkti abil (žürii lahendus 2).

   Lahendus võrdhaarsete kolmnurkade nurkade kaudu:

   Tähelepaneku eest, et kolmnurga ABC tippude juurde moodustuvad kolmnurgad on võrdhaarsed: 2 p.

   Nende võrdhaarsete kolmnurkade alusnurkade suuruste leidmise eest: 2 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

   Lahendus kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunkti abil:

   Näitamise eest, et kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunktist selle kolmnurga tippudesse tõmmatud lõigud on risti kolmnurga ABC vastavate külgedega: 3 p.

   Tähelepaneku eest, et moodustuvad kolm nelinurka on kõõlnelinurgad: 1 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Vastustena lugeda õigeks mistahes kujul avaldised nurkade α, β ja γ kaudu, mis annavad õige tulemuse, s.t. mitte punkte maha võtta selle eest, kui saadud avaldisi pole maksimaalselt lihtsustatud.

Ainult õige vastuse eest ilma lahenduseta anda 1 punkt.

6. Sobiva konstruktsiooni idee eest: 3 p.

   Põhjenduse eest, miks saadavad arvud rahuldavad kõiki ülesande tingimusi: 4 p.

   Kui on esitatud ainult lõplik hulk näiteid, millest ei selgu üldise konstruktsiooni ideed, anda 0 punkti. Kui toodud näidetest paistab välja toimiv üldine konstruktsioon, kuid pole selgitatud, miks see üldjuhul toimib, anda kuni 3 punkti.