Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

VII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia arvude $a = 5 - (-2)^2$ ja $b = (-1)^3 - 3^2$ summa.

   .....

2. Tähistagu $x * y$ arvu $\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. Arvuta $2 * 1$.

   .....

3. Kõik positiivsed täisarvud kirjutatakse neljaveerulisse tabelisse allpool näidatud viisil. Mitmendasse ritta kirjutatakse arv 2002?

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
10	12	14	16

   .....

   .....

4. Kaupluses on kolme värvi palle, mis pakendatakse viiekaupa karpidesse nii, et igas karbis on täpselt kahte värvi palle. Mitu erisugust pallide komplekti on niimoodi võimalik saada?

   .....

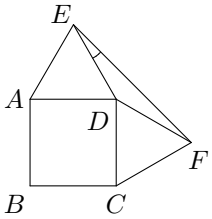
5. Mari sooritas õigesti jagamistehte $111333555777999 : 111$. Mitmekohalise arvu sai ta vastuseks?

   .....

6. Koordinaatteljel on kumbki lõikudest $[0;1]$ ja $[2;3]$ jaotatud võrdseteks osadeks. Leia lõigu AB pikkus.

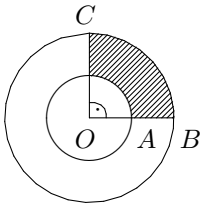
.....

7. Ruudu $ABCD$ külgedele AD ja DC konstrueeritakse võrdkülgsed kolmnurgad AED ja DFC, nagu joonisel näidatud. Leia nurga DEF suurus.



.....

8. Kahe joonisel näidatud ringi ühine keskpunkt on O. Suure ringi raadiused OB ja OC moodustavad täisnurga ning $|OA| = |AB| = 1$. Leia viirutatud kujundi pindala.

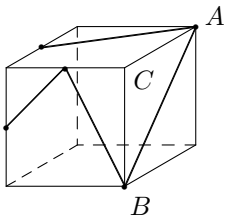


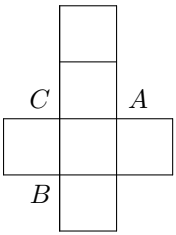
.....

9. Võrdhaarse kolmnurga alus on haarast 3 cm pikem. Leia selle kolmnurga ümbermõõt, kui haara pikkus on 4 cm.

.....

10. Kuubi kolm tippu on A, B ja C. Kuubi tahkudele on joonestatud murdjoon. Joonesta see murdjoon kuubi pinnalaotusele.





Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

VIII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia arv n, mille korral $5^7 : 5^4 \cdot 5^n = 5^5$.

   .....

2. Tähistagu $a * b$ arvu $3 \cdot (a-2) - 5 \cdot (2-3b)$. Arvuta $0 * 1$.

   .....

3. Kõik positiivsed täisarvud kirjutatakse kuueveerulisse tabelisse allpool näidatud viisil. Mitmendasse ritta kirjutatakse arv 2002?

8	9	10	11	12	1
7	6	5	4	3	2
20	21	22	23	24	13
19	18	17	16	15	14

.....

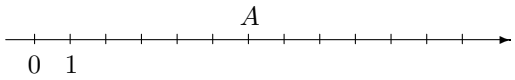
4. Leia avaldise $ab + bc + cd + da$ suurim võimalik väärtus, kui a, b, c ja d on arvud 1, 2, 3 ja 4 mingis järjekorras võetuna.

   .....

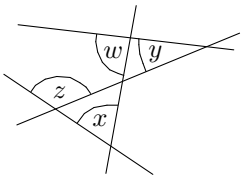
5. Leia kõik kahekohalised arvud, mille kümneliste number on üheliste numbrist 5 võrra suurem ja numbrite summa on mingi täisarvu ruut.

   .....

6. Märgi koordinaatteljel punktid B, C ja D nii, et $|AB| = 2$, $|CD| = 1$ ja $|BC| = 4$ ning punktid B ja D paiknevad lõigul AC.

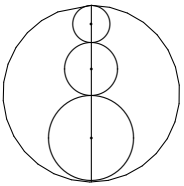


7. Nurk x on 20° võrra suurem nurgast y. Mitme kraadi võrra on nurk z suurem nurgast w?



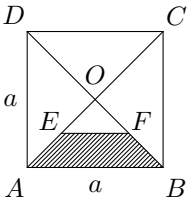
.....

8. Suurima ringi diameeter on jaotatud kolmeks osaks, mis omakorda on väiksemate ringide diameetriteks nagu joonisel näidatud. Leia kolme väiksema ringi ümbermõõtude summa, kui suurima ringi ümbermõõt on 17 cm.



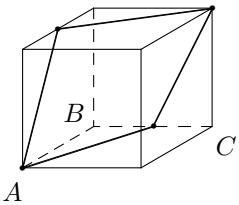
.....

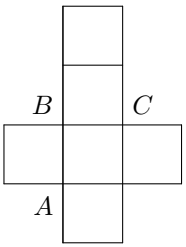
9. Ruudu $ABCD$ küljepikkus on a. Punktid E ja F poolitavad vastavalt lõigud AO ja BO. Leia nelinurga $ABFE$ pindala.



.....

10. Kuubi kolm tippu on A, B ja C. Kuubi tahkudele on joonestatud murdjoon. Joonesta see murdjoon kuubi pinnalaotusele.





Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

IX klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia arv n, mille korral $7^{2n-2} : 7^{n+4} \cdot 7^3 = 49$.

   .....

2. Leia arvude -8 ja $0{,}5$ vastandarvude korrutise ja pöördarvude summa jagatis.

   .....

3. Kõik positiivsed täisarvud kirjutatakse kaheksaveerulisse tabelisse allpool näidatud viisil. Mitmendasse ritta kirjutatakse arv 2002?

1	4	5	8	9	12	13	16
3	2	7	6	11	10	15	14
17	20	21	24	25	28	29	32
19	18	23	22	27	26	31	30

.....

   .....

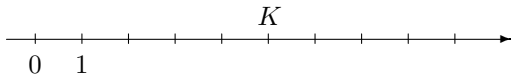
4. Leia naturaalarv a, mis on 56 võrra väiksem oma ruudust.

   .....

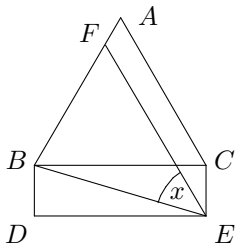
5. Jüri sooritas õigesti korrutamistehte $99999 \cdot 77777$. Milline oli tulemuseks saadud arvu numbrite summa?

   .....

6. Punktid K, L ja M paiknevad koordinaatteljel nii, et $|KL| = 2$, $|LM| = 1$ ning punkt L asetseb lõigul KM. Tähista ristikesega sirge kõik sellised punktid X, mille korral $|KX| + |LX| = |MX|$.



7. Viisnurk $ABDEC$ koosneb võrdkülgsest kolmnurgast ABC ja ristkülikust $BDEC$. Lõik BE poolitab nurga ABD ning lõik FE on paralleelne lõiguga AC. Leia joonisel märgitud nurga x suurus.

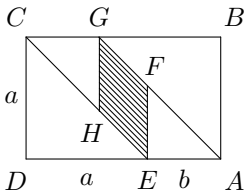


.....

8. Korrapärase hulknurga igast tipust saab tõmmata 7 diagonaali. Leia selle hulknurga sisenurkade summa.

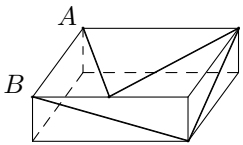
.....

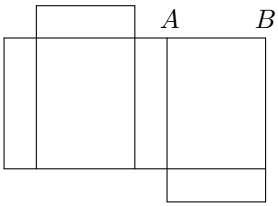
9. Lõik AG on paralleelne lõiguga CE ning lõigud EF ja GH on paralleelsed ristküliku küljega AB. Leia viirutatud rööpküliku pindala, kui $|CD| = |DE| = a$ ja $|EA| = b$.



.....

10. Risttahuka kaks tippu on A ja B. Risttahuka tahkudele on joonestatud murdjoon. Joonesta see murdjoon risttahuka pinnalaotusele.





Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

VII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kolm sõpra Rein, Madis ja Ahto külastavad raamatukogu internetipunkti alati kell 14, kuid Rein igal neljandal päeval, Madis igal viiendal päeval ja Ahto igal kuuendal päeval. Viimati kohtusid nad internetipunktis esmaspäeval, 7. jaanuaril 2002. Mitme päeva pärast, mis kuupäeval ning millisel nädalapäeval kohtuvad nad internetipunktis järgmine kord?

2. Ristküliku $ABCD$ külge DA pikendatakse üle tipu A ning valitakse sellel punkt E nii, et $|ED| = |DC|$. Leia kolmnurga ABE pindala, kui kolmnurga EDC pindala on 8 cm^2 ja kolmnurga BCD pindala on 3 cm^2.

3. Kollases pakis on 1 kg küpsiseid ja see maksab 50 krooni. Punases pakis on 10% võrra rohkem küpsiseid kui kollases pakis ning rohelises pakis on 20% võrra vähem küpsiseid kui punases pakis. Roheline pakk maksab 12% vähem kui kollane pakk ning punane pakk maksab 10% rohkem kui roheline pakk. Millises pakis olevate küpsiste 1 kg hind on kõige madalam?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

VIII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvu 15 saab esitada nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana: $15 = 4+5+6$ ja $15 = 1+2+3+4+5$. Leia kõik sellised arvust 100 väiksemad naturaalarvud, mida saab esitada nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana. Põhjenda, miks neid ei ole rohkem.

2. Rööpküliku $ABCD$ pindala on 240 cm^2 ning K ja L on vastavalt külgede AD ja CD keskpunktid. Leia kolmnurga BKL pindala.

3. Lennuk tõusis õhku linnast A kell 7.00 kohaliku aja järgi ja maandus linnas B. Pärast 3-tunnist peatust linnas B alustas lennuk tagasilendu kell 12.00 sealse aja järgi ning maandus linnas A kell 16.30 kohaliku aja järgi. Milline oli kohalik aeg linnas B hetkel, mil lennuk tõusis õhku linnast A, kui lend linnast A linna B kestis 30 minutit vähem kui lend linnast B linna A?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

IX klass

II osa: Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu x, y ja z mistahes kolm erinevat reaalarvu. Näita, et

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = -1\ .$$

2. Kolmnurgas ABC on $\angle BCA = 90^\circ$. Küljel AB märgitakse punktid K ja L nii, et $|AC| = |AK|$ ja $|BC| = |BL|$. Leia nurga KCL suurus.

3. a) Kui palju leidub arvust 100 väiksemate naturaalarvude hulgas selliseid, mille ruut avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana?

   b) Kas leidub naturaalarve, mille ruut avaldub nelja järjestikuse naturaalarvu summana?

4. Risttahukas mõõtmetega $3 \times 4 \times 5$ koosneb 60 ühikkuubist. Kui mitut neist kuupidest läbib risttahuka kaht vastastippu ühendav diagonaal?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia jagatis $\dfrac{6{,}8888\ldots}{2{,}4444\ldots}$, kus jagatav ja jagaja on lõpmatud perioodilised kümnendmurrud. Tulemus esita samuti lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

2. Leia võrrandisüsteemi kõik lahendid (kirjutis $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tähistab kaherealist determinanti):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

3. Kas leidub täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkusteks on:
   a) üks täisarv ja kaks ratsionaalarvu, mis ei ole täisarvud;
   b) kaks täisarvu ja üks ratsionaalarv, mis ei ole täisarv;
   c) üks ratsionaalarv ja kaks irratsionaalarvu;
   d) kaks ratsionaalarvu ja üks irratsionaalarv?

   Iga alapunkti kohta too näide või põhjenda, miks niisugust kolmnurka ei leidu.

4. Teravnurkses kolmnurgas ABC ümberringjoone keskpunktiga O on $\angle ACB = 60^\circ$. Lõigaku sirge AO ümberringjoont teistkordselt punktis R ning olgu M ümberringjoone selle kaare AB keskpunkt, mis ei sisalda punkti C. Tõesta, et nelinurk $ROMB$ on romb.

5. Kolmnurga külgede pikkused on täisarvud a, b ja c, kusjuures $a < b < c$ ning $a + b + c = 2002$. Leia arvu b vähim ja suurim võimalik väärtus.

6. Ruudustikule mõõtmetega 100×100 paigutatakse 99 ruudukujulist tahvlit küljepikkustega 1, 2, 3, …, 99 nii, et tahvlite küljed paiknevad ruudustiku joontel ja ükski tahvel ei ulatu ruudustikust väljapoole. Tõesta, et leidub ruudustiku ruut, mis on kaetud vähemalt 50 tahvliga.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

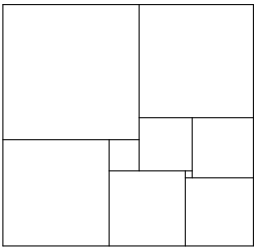
XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x+2}$.

2. Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ graafikut nihutati kõigepealt 3 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas ning seejärel peegeldati y-telje suhtes. Millise funktsiooni $y = f(x)$ graafik niiviisi saadi? Leia selle funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.

3. Ristkülik tükeldatakse 9 ruuduks, nagu joonisel näidatud. Teades, et väikseima ruudu küljepikkus on 1, leia ülejäänud ruutude küljepikkused.



4. Võrdhaarse kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab haara suhtes $1:2$. Milline võib olla selle kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

5. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral jagub arv $(n+1)^n - 1$ arvuga n^2.

6. Mereröövlite laeval on 10 piraati. Röövinud kirstu kuldmüntidega, jagasid nad mündid 10 kuhja, kuid ülelugemisel leidsid, et kuhjades pole münte ühepalju; muuhulgas oli kapteni kuhjas 2002 münti, aga pootsmani kuhjas ainult 100 münti. Piraadid otsustasid mündid ümber jagada nii: see, kelle kuhjas on kõige vähem münte, võtab endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast; seejärel võtab see, kelle kuhjas on nüüd kõige vähem münte, jällegi endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast, jne. (kui mingil sammul on vähima müntide arvuga piraate rohkem kui üks, võtab järgmisena münte juurde vanim neist). Kas võib juhtuda, et mingi arvu selliste sammude järel on kõigi piraatide kuhjades ühepalju münte?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpotenuusi otspunktid on $A(0;1;2)$ ja $B(1;0;-2)$. Leia kolmnurga kolmanda tipu C koordinaadid, kui on teada, et see paikneb xy-tasandil.

2. Millise positiivse reaalarvu a korral võrranditega $y = 1-(x-a)^2$ ja $y = x^2-1$ antud paraboolid puutuvad teineteist? Leia nende paraboolide puutepunkti koordinaadid ja nende ühise puutuja tõus.

3. Olgu X kuubi $ABCDA'B'C'D'$ tahu $ABCD$ keskpunkt. Leia lõikude $A'X$ ja $B'X$ vahelise nurga koosinus.

4. Kas leiduvad sellised naturaalarvud a, b, c ja d, et $\text{SÜT}(a,b)$, $\text{SÜT}(a,c)$, $\text{SÜT}(a,d)$, $\text{SÜT}(b,c)$, $\text{SÜT}(b,d)$ ja $\text{SÜT}(c,d)$ mingis järjekorras võetuna on järjestikused naturaalarvud?

5. Vaatleme jada $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$.
   a) Tõesta, et kui iga $i > 1$ korral kehtib võrdus $\dfrac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3} = a_i$, siis see jada on aritmeetiline.
   b) Kas sellest, et iga $i > 2$ korral $\dfrac{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{5} = a_i$, järeldub, et see jada on aritmeetiline?

6. Juku tahab kirjutada 3×3 ruudustiku igasse ruutu ühe reaalarvu nii, et arvude summa igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil oleks 0. Juku väike õde Mari aga tahab täita kaks ruutu oma tahtmist mööda. Kas Juku saab Mari kirjutatud mistahes arvude korral ülejäänud ruute sobivalt täites siiski jõuda soovitud tulemuseni, kui:
   a) Mari kirjutab arvud ülemisse vasakusse ja ülemisse paremasse nurgaruutu;
   b) Mari kirjutab arvud ülemisse vasakusse ja alumisse paremasse nurgaruutu?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

VII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти сумму чисел $a = 5 - (-2)^2$ и $b = (-1)^3 - 3^2$.

   .....

2. Обозначим через $x * y$ число $\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$. Вычислить $2 * 1$.

   .....

3. Все положительные целые числа записывают в состоящую из четырех столбцов таблицу как показано ниже. В который ряд запишут число 2002?

   .....

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
10	12	14	16

   .....

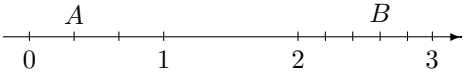
4. В магазине есть мячи трех цветов, которые упаковывают в коробки по пять штук так, чтобы в каждой коробке лежали мячи ровно двух цветов. Сколько разных комплектов мячей можно получить таким образом?

   .....

5. Маша правильно выполнила деление $111333555777999 : 111$. Число из скольки цифр она получила в результате?

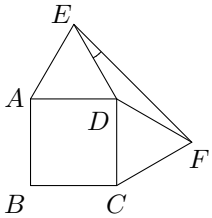
   .....

6. На координатной оси каждый из отрезков $[0;1]$ и $[2;3]$ поделен на равные части. Найти длину отрезка AB.



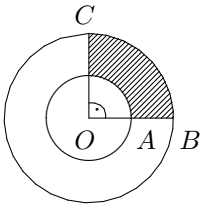
. . . . . .

7. На сторонах AD и DC квадрата $ABCD$ строят равносторонние треугольники AED и DFC, как показано на рисунке. Найти величину угла DEF.



. . . . . .

8. Два показанных на рисунке круга имеют общий центр O. Радиусы большего круга OB и OC образуют прямой угол и $|OA| = |AB| = 1$. Найти площадь заштрихованной фигуры.

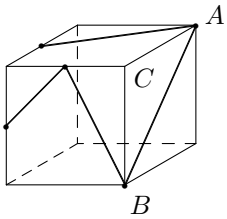


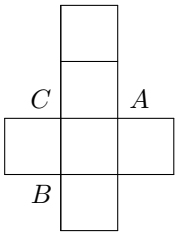
. . . . . .

9. Основание равнобедренного треугольника на 3 см длиннее бедра. Найти периметр этого треугольника, если длина бедра 4 см.

. . . . . .

10. A, B и C — три вершины куба. На гранях куба нарисована ломаная. Нарисовать эту ломаную на развертке куба.





XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

VIII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти число n, для которого $5^7 : 5^4 \cdot 5^n = 5^5$.

   .....

2. Обозначим через $a * b$ число $3 \cdot (a-2) - 5 \cdot (2-3b)$. Вычислить $0 * 1$.

   .....

3. Все положительные целые числа записывают в состоящую из шести столбцов таблицу как показано ниже. В который ряд запишут число 2002?

   .....

8	9	10	11	12	1
7	6	5	4	3	2
20	21	22	23	24	13
19	18	17	16	15	14
.....					

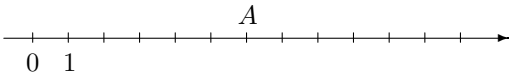
4. Найти наибольшее возможное значение выражения $ab+bc+cd+da$, если a, b, c и d — числа 1, 2, 3 и 4, взятые в некотором порядке.

   .....

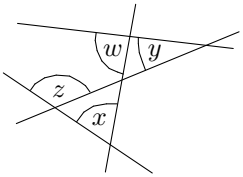
5. Найти все двузначные числа, число десятков которых на 5 больше числа единиц, а сумма цифр равна квадрату некоторого целого числа.

   .....

6. Отметить на координатной оси точки B, C и D так, чтобы $|AB| = 2$, $|CD| = 1$ и $|BC| = 4$, а точки B и D лежали бы на отрезке AC.

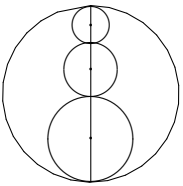


7. Угол x на 20° больше угла y. На сколько градусов угол z больше угла w?



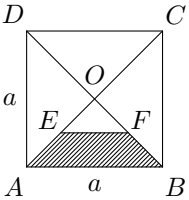
.....

8. Диаметр большого круга поделен на три части, которые, в свою очередь, являются диаметрами меньших кругов, как показано на рисунке. Найти сумму длин окружностей трех меньших кругов, если длина окружности большого круга равна 17 см.



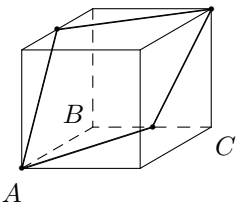
.....

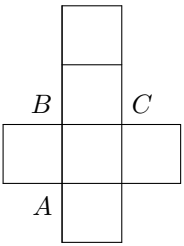
9. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна a. Точки E и F делят пополам соответственно отрезки AO и BO. Найти площадь четырехугольника $ABFE$.



.....

10. A, B и C — три вершины куба. На гранях куба нарисована ломаная. Нарисовать эту ломаную на развертке куба.





XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

IX класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти число n, для которого $7^{2n-2} : 7^{n+4} \cdot 7^3 = 49$.

   .....

2. Найти частное произведения противоположных и суммы обратных чисел к числам -8 и $0{,}5$.

   .....

3. Все положительные целые числа записывают в состоящую из восьми столбцов таблицу как показано ниже. В который ряд запишут число 2002?

   .....

1	4	5	8	9	12	13	16
3	2	7	6	11	10	15	14
17	20	21	24	25	28	29	32
19	18	23	22	27	26	31	30

.....

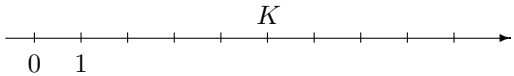
4. Найти натуральное число a, которое на 56 меньше своего квадрата.

   .....

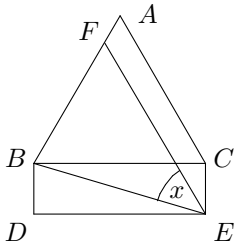
5. Юра правильно выполнил умножение $99999 \cdot 77777$. Какова сумма цифр полученного в результате числа?

   .....

6. Точки K, L и M расположены на координатной оси так, что $|KL| = 2$, $|LM| = 1$, а точка L расположена на отрезке KM. Обозначить крестиками все лежащие на прямой точки X, для которых $|KX| + |LX| = |MX|$.



7. Пятиугольник $ABDEC$ состоит из равностороннего треугольника ABC и прямоугольника $BDEC$. Отрезок BE делит угол ABD пополам, а отрезок FE параллелен отрезку AC. Найти величину угла, обозначенного на рисунке через x.

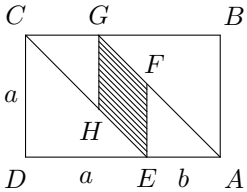


. . . . . .

8. Из каждой вершины правильного многоугольника можно провести 7 диагоналей. Найти сумму внутренних углов этого многоугольника.

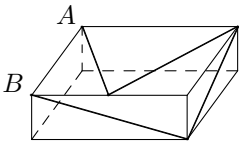
. . . . . .

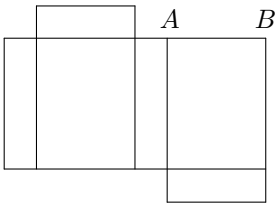
9. Отрезок AG параллелен отрезку CE, а отрезки EF и GH параллельны стороне AB прямоугольника. Найти площадь заштрихованного параллелограмма, если $|CD| = |DE| = a$ и $|EA| = b$.



. . . . . .

10. A и B — две вершины прямоугольного параллелепипеда. На гранях параллелепипеда нарисована ломаная. Нарисовать эту ломаную на развертке параллелепипеда.





XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

VII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Три друга Рома, Миша и Андрей посещают интернет-кафе библиотеки всегда в 14 часов, но Рома каждый четвертый, Миша каждый пятый, а Андрей каждый шестой день. Последний раз они встретились в интернет-кафе в понедельник, 7-го января 2002. Через сколько дней, какого числа и в какой день недели они встретятся в интернет-кафе в следующий раз?

2. Сторона DA прямоугольника $ABCD$ продолжается за вершину A и на ней выбирается точка E так, что $|ED| = |DC|$. Найти площадь треугольника ABE, если площадь треугольника EDC равна $8\,\mathrm{cm}^2$ и площадь треугольника BCD равна $3\,\mathrm{cm}^2$.

3. В желтой пачке 1 кг печенья и она стоит 50 крон. В красной пачке на 10% больше печенья, чем в желтой, а в зеленой на 20% меньше печенья, чем в красной. Зеленая пачка стоит на 12% меньше, чем желтая пачка, а красная пачка стоит на 10% больше, чем зеленая. В какой пачке стоимость 1 кг печенья ниже всего?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

VIII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число 15 можно представить суммой как трех, так и пяти последовательных натуральных чисел: $15 = 4+5+6$ и $15 = 1+2+3+4+5$. Найти все такие натуральные числа меньше 100, которые можно представить в виде суммы как трех, так и пяти последовательных натуральных чисел. Обосновать, почему их не больше.

2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $240\ \mathrm{cm}^2$, а точки K и L соответственно середины сторон AD и CD. Найти площадь треугольника BKL.

3. Самолет взлетел из города A в 7.00 по местному времени и приземлился в городе B. После трехчасовой остановки в городе B самолет начал обратный полет в 12.00 по времени города B и приземлился в городе A в 16.30 по местному времени. Какое было местное время в городе B в момент взлета самолета из города A, если полет из города A в город B продолжался на 30 минут меньше, чем полет из города B в город A?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

IX класс

II часть: Время, отводимое для решения: 4 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть x, y и z три любых различных действительных числа. Показать, что

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = -1\ .$$

2. В треугольнике ABC угол $\angle BCA = 90^\circ$. На стороне AB обозначаются точки K и L так, что $|AC| = |AK|$ и $|BC| = |BL|$. Найти величину угла KCL.

3. а) Сколько среди натуральных чисел меньше 100 найдется таких, квадрат которых выражается в виде суммы трех последовательных натуральных чисел?

   б) Найдется ли натуральное число, квадрат которого выражается в виде суммы четырех последовательных натуральных чисел?

4. Прямоугольный параллелепипед размера $3 \times 4 \times 5$ состоит из 60 единичных кубиков. Через сколько этих кубиков проходит диагональ, соединяющая две противоположные вершины параллелепипеда?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти частное $\dfrac{6{,}8888\ldots}{2{,}4444\ldots}$, где делимое и делитель бесконечные периодические десятичные дроби. Результат также представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

2. Найти все решения системы уравнений (запись $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ обозначает определитель второго порядка):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

3. Найдется ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого:
   а) одно целое и два рациональных числа, не являющиеся целыми;
   б) два целых и одно рациональное число, не являющееся целым;
   в) одно рациональное и два иррациональных числа;
   г) два рациональных и одно иррациональное число?

   Для каждого подпункта привести пример или обосновать, почему такого треугольника не существует.

4. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O имеется $\angle ACB = 60^\circ$. Пусть прямая AO пересекает второй раз описанную окружность в точке R и пусть M середина этой дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C. Доказать, что четырехугольник $ROMB$ есть ромб.

5. Длины сторон треугольника целые числа a, b и c, причем $a < b < c$ и $a + b + c = 2002$. Найти наименьшее и наибольшее возможные значения числа b.

6. На клетчатую доску размером 100×100 кладут 99 квадратных плиток, со сторонами $1, 2, 3, \ldots, 99$ так, что стороны плиток расположены на сторонах клеток и ни одна плитка не выходит за границы доски. Доказать, что найдется клетка доски, которая покрыта не менее чем 50 плитками.

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

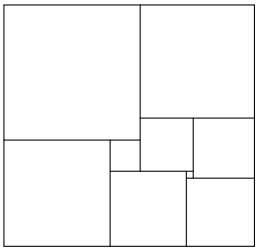
XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x+2}$.

2. График функции $y=\sqrt{x}$ сдвинули сначала на 3 единицы в отрицательном направлении оси x, а после этого зеркально отразили относительно оси y. График какой функции $y=f(x)$ получили таким образом? Найти область определения и область значений этой функции.

3. Прямоугольник разбивают на 9 квадратов, как показано на рисунке. Зная, что длина стороны наименьшего квадрата равна 1, найти длины сторон остальных квадратов.



4. Высота, опущенная на бедро равнобедренного треугольника, делит бедро в отношении $1:2$. Каково может быть отношение длин бедра и основания в этом треугольнике?

5. Доказать, что при любом положительном целом n число $(n+1)^n-1$ делится на число n^2.

6. На пиратском корабле находятся 10 пиратов. Похитив ящик с золотыми монетами, они разделили их на 10 кучек, но при пересчете обнаружили, что количество монет в кучках неравное; при этом в кучке капитана было 2002 монеты, а в кучке боцмана — только 100 монет. Пираты решили перераспределить деньги так: тот, у кого в кучке меньше всего монет, берет себе по одной монете из кучек всех остальных пиратов; затем тот, у кого теперь в кучке меньше всего монет, берет по одной монете из кучек всех остальных пиратов и т.д. (если на каком-либо шаге будет более чем один пират с наименьшим количеством монет, то следующим монеты берет старший из них). Может ли случиться, что после некоторого числа таких шагов в кучках у всех пиратов будет равное количество монет?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Точки $A(0;1;2)$ и $B(1;0;-2)$ являются концами гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника. Найти координаты третьей вершины C этого треугольника, если известно, что она лежит на плоскости xy.

2. Для какого положительного действительного числа a параболы, заданные уравнениями $y = 1-(x-a)^2$ и $y = x^2-1$ касаются друг друга? Найти координаты точки касания парабол и угловой коэффициент их общей касательной.

3. Пусть X центр грани $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$. Найти косинус угла между отрезками $A'X$ и $B'X$.

4. Найдутся ли такие натуральные числа a, b, c и d, что НОД(a,b), НОД(a,c), НОД(a,d), НОД(b,c), НОД(b,d) и НОД(c,d) взятые в некотором порядке являются последовательными натуральными числами?

5. Рассмотрим последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$.
   а) Доказать, что если для каждого $i > 1$ выполняется равенство $\dfrac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3} = a_i$, то эта последовательность арифметическая.
   б) Следует ли из того, что для каждого $i > 2$ выполняется равенство $\dfrac{a_{i-2}+a_{i-1}+a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{5} = a_i$ то, что эта последовательность арифметическая?

6. Юра хочет написать в каждую клетку таблицы 3×3 одно действительное число так, чтобы сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях была равна 0. Но его младшая сестра Маша хочет заполнить две клетки по своему желанию. Может ли Юра при любых числах, написанных Машей, все же достичь желаемого результата, заполняя оставшиеся клетки подходящим образом, если:
   а) Маша пишет числа в верхнюю левую и верхнюю правую угловые клетки;
   б) Маша пишет числа в верхнюю левую и нижнюю правую угловые клетки?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

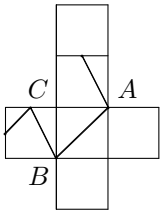
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. -9. 2. $-1\frac{1}{2}$. 3. 502. ritta. 4. 12. 5. 13-kohalise. 6. $2\frac{4}{15}$. 7. $15°$. 8. $\frac{3}{4}\pi$. 9. 15 cm. 10. vt. joonist 1.



Joonis 1

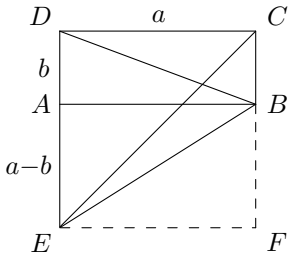
VII klass, II osa

1. *Vastus:* 60 päeva pärast: reedel, 8. märtsil 2002.

   Päevade arv Reinu, Madise ja Ahto ühest kohtumisest raamatukogu internetipunktis järgmiseni on vähim positiivne täisarv, mis jagub arvudega 4, 5 ja 6, s.t. nende arvude vähim ühiskordne VÜK $(4, 5, 6) = 60$. Et nädalas on 7 päeva, $60 = 8 \cdot 7 + 4$ ning poiste eelmine kohtumine toimus esmaspäeval, siis järgmise kohtumise nädalapäev on reede. Et jaanuaris on 31 päeva ning veebruaris 28 päeva (aasta 2002 ei ole liigaasta), siis 7. jaanuarist 7. märtsini on kokku $31 + 28 = 59$ päeva ja 60. päev pärast poiste eelmist kohtumist on seega 8. märts.

2. *Vastus:* $5\ \mathrm{cm}^2$.

Lahendus 1. Valime punkti F nii, et nelinurk $CDEF$ oleks ristkülik (tegelikult isegi ruut, sest $|ED| = |DC|$ — vt. joonist 2). Et kolmnurk EDC pindalaga 8 cm^2 moodustab poole ruudust $CDEF$, siis selle ruudu pindala on 16 cm^2. Et kolmnurk BCD pindalaga 3 cm^2 moodustab poole ristkülikust $ABCD$, siis selle ristküliku pindala on 6 cm^2. Ristküliku $AEFB$ pindala on seega $16 - 6 = 10$ cm^2 ning sellest ristkülikust poole moodustava kolmnurga ABE pindala on 5 cm^2.



Joonis 2

Lahendus 2. Nelinurk $BCDE$ koosneb kolmnurgast EDC, mille pindala on 8 cm^2, ja kolmnurgast EBC, mille pindala on võrdne kolmnurga BCD pindalaga (sest neil on sama alus ja ühine kõrgus), s.t. 3 cm^2. Kokku on nelinurga $BCDE$ pindala seega $8 + 3 = 11$ cm^2. Et kolmnurga ABE pindala saamiseks tuleb nelinurga $BCDE$ pindalast lahutada ristküliku $ABCD$ pindala ehk kahekordne kolmnurga BCD pindala, siis kolmnurga ABE pindala on

$$S_{ABE} = S_{BCDE} - 2S_{BCD} = 11 - 2 \cdot 3 = 5 \text{ cm}^2 .$$

Lahendus 3. Kolmnurkade EDB ja EDC pindalad on võrdsed (sest neil on sama alus ja ühine kõrgus), samuti on võrdsed kolmnurkade ADB ja BCD pindalad. Seega

$$S_{ABE} = S_{EDB} - S_{ADB} = S_{EDC} - S_{BCD} = 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2 .$$

Lahendus 4. Et $|ED| = |DC|$ ja kolmnurga EDC pindala on

$$S_{EDC} = \frac{|ED| \cdot |DC|}{2} = 8 \text{ cm}^2 ,$$

siis $|AB| = |ED| = |DC| = 4\,\mathrm{cm}$. Et kolmnurga BCD pindala on

$$S_{BCD} = \frac{|BC| \cdot |DC|}{2} = 3\ \mathrm{cm}^2\ ,$$

siis $|AD| = |BC| = 1{,}5$ cm ning $|AE| = |ED| - |AD| = 2{,}5$ cm. Kolmnurga ABE pindala on seega

$$S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot |AE|}{2} = \frac{4 \cdot 2{,}5}{2} = 5\ \mathrm{cm}^2\ .$$

Lahendus 5. Olgu ristküliku külgede pikkused $|AB| = |DC| = a$ ja $|AD| = |BC| = b$. Et $|ED| = |DC| = a$, siis $|AE| = a - b$. Kuna kolmnurga EDC pindala on $\frac{a^2}{2}$, kolmnurga BCD pindala on $\frac{ab}{2}$ ja kolmnurga ABE pindala on $\frac{a(a-b)}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{2}$, siis kolmnurga ABE pindala on

$$S_{ABE} = S_{EDC} - S_{BCD} = 8 - 3 = 5\ \mathrm{cm}^2\ .$$

3. *Vastus:* punases pakis.

Lahendus 1. Et punases pakis on 10% võrra rohkem küpsiseid kui kollases pakis ja rohelises pakis 20% võrra vähem küpsiseid kui punases pakis ning kollases pakis on 1 kg küpsiseid, siis punases pakis on $1 \cdot \frac{100+10}{100} = 1{,}1$ kg küpsiseid ja rohelises pakis on $1{,}1 \cdot \frac{100-20}{100} = 0{,}88$ kg küpsiseid. Et roheline pakk maksab 12% võrra vähem kollasest pakist ja punane pakk 10% võrra rohkem punasest pakist ning kollane pakk maksab 50 krooni, siis roheline pakk maksab $50 \cdot \frac{100-12}{100} = 44$ krooni ja punane pakk maksab $44 \cdot \frac{100+10}{100} = 48{,}4$ krooni. Ühe kilogrammi küpsiste hind on seega kollases pakis 50 krooni, rohelises pakis $\frac{44}{0{,}88} = 50$ krooni ja punases pakis $\frac{48{,}4}{1{,}1} = 44$ krooni.

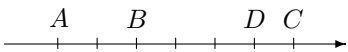
Lahendus 2. Punases pakis on 10% võrra rohkem küpsiseid kui

kollases, s.t. punases pakis on $\dfrac{100+10}{100} = 1{,}1$ korda niipalju küpsiseid kui kollases. Rohelises pakis on 20% võrra vähem küpsiseid kui punases, s.t. rohelises pakis on $\dfrac{100-20}{100} = 0{,}8$ korda niipalju küpsiseid kui punases, ehk kokku $1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}88$ korda niipalju küpsiseid kui kollases. Roheline pakk maksab 12% võrra vähem kui kollane, s.t. rohelise paki hind on $\dfrac{100-12}{100} = 0{,}88$ korda kollase paki hind. Järelikult rohelise ja kollase paki küpsised on ühesuguse 1 kg hinnaga.

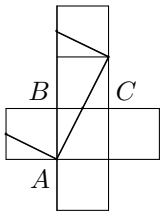
Punase paki hind on 10% võrra kõrgem kui rohelisel pakil, kuid küpsiseid on seal 10% võrra rohkem kui kollases pakis, kus on rohkem küpsiseid kui rohelises pakis. Seega punase paki küpsised on rohelise ja kollase paki küpsistest odavamad.

VIII klass, I osa

1. 2. 2. -1. 3. 333. ritta. 4. 25. 5. 72 on ainus selline arv.
6. vt. joonist 3; sobib ka selle peegelpilt. 7. 20. 8. 17 cm. 9. $\dfrac{3}{16}a^2$.
10. vt. joonist 4.



Joonis 3



Joonis 4

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 15, 30, 45, 60, 75 ja 90.

   Kolme järjestikuse naturaalarvu summa on

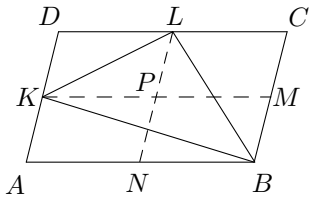
   $$(a-1) + a + (a+1) = 3a\ ,$$

kus a on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 3-ga (välja arvatud arv 0, kui see lugeda naturaalarvuks, või arv 3, kui 0 naturaalarvuks mitte lugeda, sest selle korral pole vähim liidetavatest naturaalarv). Viie järjestikuse naturaalarvu summa on

$$(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2)=5b\,,$$

kus b on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub viie järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 5-ga (välja arvatud jällegi arv 0 või 5 olenevalt sellest, kas 0 lugeda naturaalarvuks või mitte).

Järelikult avalduvad nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana need ja ainult need naturaalarvud, mis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga, välja arvatud arv 0. Et arvud 3 ja 5 on ühistegurita, siis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga parajasti need arvud, mis jaguvad 15-ga. Seega otsitavad arvud on 15, 30, 45, 60, 75 ja 90.



Joonis 5

2. *Vastus:* 90 cm^2.

Olgu M ja N vastavalt rööpküliku külgede BC ja AB keskpunktid ning P lõikude KM ja LN lõikepunkt ehk rööpküliku keskpunkt (vt. joonist 5). Siis kolmnurga ABK pindala on pool rööpküliku $ABMK$ pindalast ehk $\frac{1}{4}$ rööpküliku $ABCD$ pindalast, kolmnurga BCL pindala on pool rööpküliku $BCLN$ pindalast ehk samuti $\frac{1}{4}$ rööpküliku $ABCD$ pindalast ning kolmnurga LDK pindala on pool rööpküliku $LDKP$ pindalast ehk $\frac{1}{8}$ rööpkü-

liku $ABCD$ pindalast. Otsitav kolmnurga BLK pindala on seega

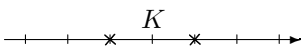
$$S_{BKL} = S_{ABCD} - S_{ABK} - S_{BCL} - S_{LDK} =$$
$$= S_{ABCD} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8} \cdot S_{ABCD} = 90 \text{ cm}^2 .$$

3. *Vastus:* 6.00.

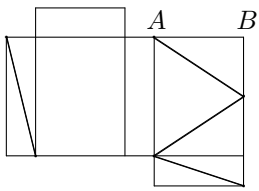
   Et lennuk tõusis linnast A õhku kell 7.00 ja maandus taas linnas A kell 16.30, siis lend linnast A linna B, 3-tunnine peatus linnas B ja tagasilend linnast B linna A kestsid kokku 9 tundi ja 30 minutit, millest mõlema lennu koguaeg moodustas 6 tundi ja 30 minutit. Et lend linnast A linna B kestis 30 minutit vähem kui lend linnast B linna A, siis lend linnast B linna A kestis 3 tundi ja 30 minutit ning lennuk tõusis linnast B õhku kell 13.00 linna A aja järgi. Seega on linna B kohalik aeg 1 tund järel linna A kohalikust ajast ning lennuk tõusis linnast A õhku kell 6.00 linna B aja järgi.

IX klass, I osa

1. 5. 2. $-2\frac{2}{15}$. 3. 252. ritta. 4. 8. 5. 45. 6. vt. joonist 6. 7. $45°$. 8. $1440°$. 9. $ab - b^2$. 10. vt. joonist 7.



Joonis 6



Joonis 7

IX klass, II osa

1. Olgu võrduse vasak pool A. Viies murrud ühisele nimetajale, saame

$$A = \frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{x(y+z)(y-z)+y(z+x)(z-x)+z(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} =$$
$$= \frac{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}{(x-y)(x-z)(y-z)} .$$

Avades nimetajas sulud, saame

$$\begin{aligned}(x-y)(x-z)(y-z) &= (x^2-xz-yx+yz)(y-z) = \\ &= x^2y-xzy-y^2x+y^2z-x^2z+xz^2+yxz-yz^2 = \\ &= y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2) = \\ &= -\big(x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\big) ,\end{aligned}$$

kust $A=-1$.

2. *Vastus:* 45°.

Lahendus 1. Olgu kolmnurga ABC teravnurkade suurused $\angle A=\alpha$ ja $\angle B=\beta$ (vt. joonist 8), siis $\alpha+\beta=90^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast CAK saame

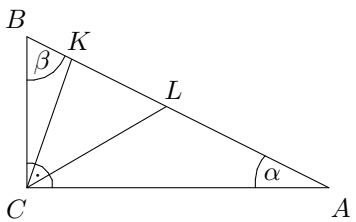
$$\angle AKC = \frac{180^\circ-\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

ning võrdhaarsest kolmnurgast LBC saame

$$\angle BLC = \frac{180^\circ-\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} .$$

Kolmnurgast CLK leiame nüüd

$$\angle KCL = 180^\circ - \angle AKC - \angle BLC = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ .$$



Joonis 8

Lahendus 2. Tähistame $x = \angle KCL$, $y = \angle CKL = \angle ACK$ ja $z = \angle KLC = \angle LCB$. Siis nurga ACB suurus on $y + z - x = 90^\circ$ ning kolmnurga CKL sisenurkade summa on $y+z+x = 180^\circ$. Lahutades teisest võrdusest esimese, saame $2x = 90^\circ$, kust $x = 45^\circ$.

3. *Vastus:* a) 33; b) ei leidu.

a) Et kolme järjestikuse naturaalarvu summa on

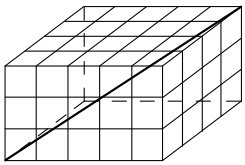
$$(a-1) + a + (a+1) = 3a\ ,$$

kus a on keskmine neist arvudest, siis naturaalarv avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 3-ga (välja arvatud arv 0, kui see lugeda naturaalarvuks, või arv 3, kui 0 naturaalarvuks mitte lugeda, sest selle korral pole vähim liidetavatest naturaalarv). Naturaalarvu ruut aga jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui see arv ise jagub 3-ga. Seega vastavad ülesande tingimustele parajasti kõik 3-ga jaguvad 100-st väiksemad naturaalarvud, välja arvatud arv 0. Selliseid arve on 33.

b) Nelja järjestikuse naturaalarvu summa on

$$(a-1) + a + (a+1) + (a+2) = 4a + 2\ ,$$

kus a on teine neist arvudest, ning annab seega 4-ga jagades jäägi 2. Mistahes paaritu naturaalarvu ruut aga annab 4-ga jagades jäägi 1 ning mistahes paarisarvu ruut jagub 4-ga — seega ei leidu naturaalarvu, mille ruut esituks nelja järjestikuse naturaalarvu summana.



Joonis 9

4. *Vastus:* 10 kuupi.

Vaatleme risttahukat lõikavaid tasandeid, mis on paralleelsed risttahuka mingi paari vastastahkudega ega lõika ühtki neist kuupidest, millest risttahukas on kokku pandud (vt. joonist 9). Neist

tasanditest 4 on risti risttahuka pikkusega 5 servadega (ehk paralleelsed mõõtmetega 3×4 tahkudega), 3 on risti pikkusega 4 servadega ning 2 on risti pikkusega 3 servadega: kokku on neid tasandeid seega $4+3+2=9$. Risttahuka kaht vastastippu ühendav diagonaal läheb ühest kuubist üle teise siis ja ainult siis, kui ta lõikab üht neist 9 tasandist, ning igaüht neist tasandeist lõikab ta täpselt ühe korra. Jääb üle veenduda, et diagonaal ei lõika korraga rohkem kui üht neist tasandeist: kui see oleks nii, siis peaks kehtima üks võrdustest $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ ja $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$, kus a, b ja c on positiivsed täisarvud ning $a \leqslant 2$, $b \leqslant 3$ ja $c \leqslant 4$ (arve a, b ja c võib vaadelda kui lõigatavate tasandite järjekorranumbreid vastava tahkude paariga paralleelsete vaadeldavate tasandite hulgas). See ei ole aga võimalik, sest arvud 3, 4 ja 5 on paarikaupa ühistegurita. Niisiis läheb diagonaal ühest kuubist teise üle 9 korral ning läbib seega 10 kuupi.

X klass

1. *Vastus:* 2,818181....

   Olgu $x = 0{,}4444\ldots$, siis $10x = x+4$, kust $9x = 4$ ehk $x = \frac{4}{9}$. Seega $6{,}8888\ldots = 6 + 2\cdot\frac{4}{9} = \frac{62}{9}$, $2{,}4444\ldots = 2+\frac{4}{9} = \frac{22}{9}$ ning otsitav jagatis on $\frac{62}{22} = 2\frac{9}{11}$ ehk lõpmatu perioodilise kümnendmurruna $2{,}818181\ldots$ (perioodi leidmiseks jagame arvu 9 arvuga 11).

2. *Vastus:* $x=3$, $y=0$; $x=3$, $y=-1$; $x=-2$, $y=0$; $x=-2$, $y=-1$.

   Kirjutades determinandid lahti, saame

$$\begin{cases} (x^2-2)+(1-y^2) = (x+4)+(1+y) \\ (x^2-2)-(1-y^2) = (x+4)-(1+y) \end{cases}.$$

   Liites võrrandite vastavad pooled, saame $2(x^2-2)=2(x+4)$ ehk $x^2-x-6=0$, kust $x=3$ või $x=-2$. Lahutades esimesest

võrrandist teise, saame $2(1-y^2) = 2(1+y)$ ehk $y^2 + y = 0$, kust $y = 0$ või $y = -1$. Kõik neli saadavat kombinatsiooni x ja y väärtustest rahuldavad ka antud võrrandisüsteemi.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei; c) jah; d) jah.

   a) Sobib näiteks kolmnurk küljepikkustega $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ja 1 (või mistahes muu kolmnurk, mis on saadud täisarvuliste küljepikkustega täisnurkse kolmnurga homoteetsel vähendamisel nii, et mingi külje pikkuseks saaks 1).

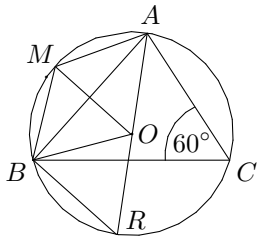
   b) Oletame, et selline kolmnurk leidub: siis selle külgede pikkusteks on mingid täisarvud m ja n ning taandumatu murd $\frac{p}{q}$. Vastavalt Pythagorase teoreemile peab murd $\frac{p^2}{q^2}$ olema võrdne ühega täisarvudest m^2+n^2, m^2-n^2 ja n^2-m^2. See ei ole aga võimalik, sest ka murd $\frac{p^2}{q^2}$ on taandumatu (arvude p^2 ja q^2 mistahes ühine algtegur oleks ka arvude p ja q ühine algtegur).

   c) Sobib näiteks võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on pikkusega $\sqrt{2}$ ja hüpotenuus pikkusega 2 (või mistahes muu võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on ratsionaalarvulise pikkusega; on ka teistsuguseid sobivaid kolmnurki, nt. küljepikkustega $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ ja 3 või 1, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$).

   d) Sobib näiteks võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on pikkusega 1 ja hüpotenuus pikkusega $\sqrt{2}$ (või mistahes selline täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkused on täisarvud ja nende ruutude summa pole täisruut; on ka teistsuguseid sobivaid kolmnurki, nt. küljepikkustega 1, $\sqrt{3}$ ja 2).

4. *Lahendus 1.* Kuna $\angle ACB = 60^\circ$ ning piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest, siis $\angle AOB = 120^\circ$ (siinjuures on oluline, et punktid O ja C oleksid sirgest AB samal pool — see on nii, kuna ümberringjoone keskpunkt O paikneb kolmnurga ABC sees). Et M on kaare AB keskpunkt, siis lõik OM on nurga AOB poolitaja ning $\angle AOM = \angle MOB = 60^\circ$ (vt. joonist 10). Samas $\angle ROB = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Et $|RO| = |BO| = |MO|$, siis kolmnurgad MOB ja ROB on

võrdkülgsed ja nelinurk $ROMB$ on romb.



Joonis 10

Lahendus 2. Et punktid C ja M on kõõlust AB erineval pool, siis $\angle AMB = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$. Et M on kaare AB keskpunkt, siis $\angle AMO = \angle BMO = 60^\circ$, ning kuna $|OM| = |OB|$, siis kolmnurk BMO on võrdhaarne 60° alusnurgaga ja seega võrdkülgne. Et teravnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O paikneb kolmnurga sees, siis punktid R ja C on kõõlust AB samal pool ning $\angle ORB = \angle ARB = \angle ACB = 60^\circ$, ning kuna $|OR| = |OB|$, siis kolmnurk BRO on samuti võrdkülgne. Seega nelinurk $ROMB$ on romb.

5. *Vastus:* 502 ja 999.

Et kolmnurgas on mistahes külje pikkus väiksem ülejäänud kahe külje pikkuste summast ning vaadeldava kolmnurga külgede pikkused on täisarvud, siis $c \leqslant a + b - 1$. Kuna $a < b$, siis $a \leqslant b - 1$, mistõttu $c \leqslant a + b - 1 \leqslant 2b - 2$ ning

$$2002 = a + b + c \leqslant (b - 1) + b + (2b - 2) = 4b - 3 \,.$$

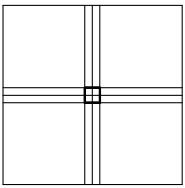
Siit $b \geqslant \dfrac{2005}{4}$ ning täisarvulisuse tõttu $b \geqslant 502$. Väärtus $b = 502$ on tõepoolest võimalik, sest on olemas kolmnurgad küljepikkustega 501, 502 ja 999 ning 500, 502 ja 1000.

Leidmaks b maksimaalset võimalikku väärtust paneme tähele, et $c \geqslant b + 1$ ning kuna $c \leqslant a + b - 1$, siis $a \geqslant c - b + 1 \geqslant 2$. Seega

$$2002 = a + b + c \geqslant 2 + b + (b + 1) = 2b + 2 \,,$$

kust $b \leqslant \dfrac{1999}{2}$ ning täisarvulisuse tõttu $b \geqslant 999$. Väärtus $b = 999$

on võimalik, sest on olemas kolmnurk küljepikkustega 3, 999 ja 1000.



Joonis 11

6. Vaatleme ruudustiku nelja keskmist ruutu (vt. joonist 11). Igaüks 49 tahvlist, mille küljepikkus on vähemalt 51, katab mistahes paigutuse korral kõik need ruudud; tahvel küljepikkusega 50 aga katab mistahes paigutuse korral vähemalt ühe neist neljast ruudust. See ruut ongi niisiis kaetud vähemalt 50 tahvliga.

XI klass

1. *Vastus:* $x = 0$ või $x = -\dfrac{3}{2}$.

   Teisendades võrrandi kujule

   $$(x^2 + 1 + 1)(x^2 + x + 2) = (x^2 - x - 1)(x^2 - x - 2)$$

   ning avades sulud, saame

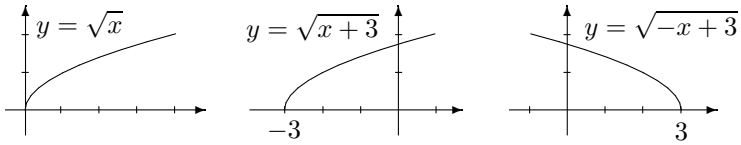
   $$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2\ ,$$

   mis sarnaste liikmete koondamisel annab $4x^3 + 6x^2 = 0$ ehk $4x^2\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$. Selle võrrandi lahenditeks on $x = 0$ ja $x = -\dfrac{3}{2}$, mis ka mõlemad rahuldavad esialgset võrrandit (on vaja kontrollida, et kumbki nimetaja ei võrduks nulliga).

2. *Vastus:* $y = \sqrt{-x+3}$; määramispiirkond on $(-\infty; 3]$ ja muutumispiirkond $[0; \infty)$.

   Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku nihutamine a võrra x-telje negatiivses suunas teisendab selle funktsiooni $y = f(x+a)$ graafikuks,

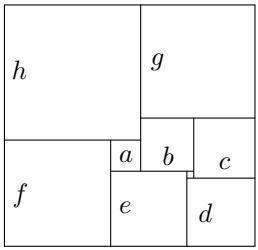
peegeldamine y-telje suhtes aga funktsiooni $y = f(-x)$ graafikuks. Seega saame funktsiooni $y = \sqrt{x}$ graafikust nihutamise tulemusena funktsiooni $y = \sqrt{x+3}$ graafiku ning sellest peegeldamisel omakorda funktsiooni $y = \sqrt{-x+3}$ graafiku. See funktsioon on määratud, kui $x \leqslant 3$, s.t. määramispiirkonnaks on $(-\infty; 3]$, ning omandab samuti nagu funktsioon $y = \sqrt{x}$ suvalisi mittenegatiivseid väärtusi, s.t. muutumispiirkonnaks on $[0; \infty)$.



Joonis 12

3. *Vastus:* 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 ja 18.

Olgu ülejäänud 8 ruudu küljepikkused suuruse järjekorras a, b, c, d, e f, g ja h (vt. joonist 13), siis $c = b + 1$, $d = c + 1$ ja $e = d + 1$, s.t. $e = b + 3$. Et $e + 1 = b + a$, siis $a = (b + 4) - b = 4$. Nüüd $f = e + a = e + 4$ ja $h = f + a = e + 8 = b + 11$ ning $g = b + c = 2b + 1$. Teisalt aga $g + b = h + a$ ehk $3b + 1 = b + 15$, kust $b = 7$ ning $c = b + 1 = 8$, $d = c + 1 = 9$, $e = d + 1 = 10$, $f = e + 4 = 14$, $g = 2b + 1 = 15$ ja $h = f + 4 = 18$.



Joonis 13

4. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ või $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Olgu see võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga A ning olgu

D tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt haaral AC. Olgu selle kolmnurga aluse pikkus a ja haara pikkus x. Avaldades kõrguse BD ruudu Pythagorase teoreemi põhjal nii kolmnurgas BDA kui ka kolmnurgas BDC, saame

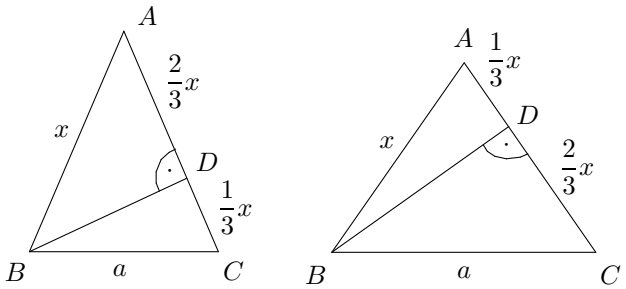
$$x^2 - |AD|^2 = |BD|^2 = a^2 - |DC|^2 \ ,$$

kust

$$a^2 = x^2 - |AD|^2 + |DC|^2 = x^2 \left(1 - \left(\frac{|AD|}{x}\right)^2 + \left(\frac{|DC|}{x}\right)^2\right)$$

ning

$$\frac{a^2}{x^2} = 1 - \left(\left(\frac{|AD|}{x}\right)^2 - \left(\frac{|DC|}{x}\right)^2\right).$$



Joonis 14

Ülesande tingimuste põhjal avaldiste $\frac{|AD|}{x}$ ja $\frac{|DC|}{x}$ väärtused on $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ mingis järjekorras (kaks erinevat võimalust selleks on kujutatud joonisel 14). Nende ruudud on seega $\frac{1}{9}$ ja $\frac{4}{9}$ samas järjekorras ning nende ruutude vahe on $\pm\frac{3}{9} = \pm\frac{1}{3}$. Seega esimese võimalusena $\frac{a^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, millest $\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{2}$ ja $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ning

teise võimalusena $\dfrac{a^2}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$, millest $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{3}{4}$ ja $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. *Lahendus 1.* Rakendades samasust

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

$a = n + 1$ korral, saame

$$(n{+}1)^n - 1 = (n + 1 - 1)\big((n{+}1)^{n-1} + (n{+}1)^{n-2} + \ldots + 1\big)\,.$$

Teine tegur koosneb n liidetavast, mis kõik annavad n-ga jagamisel jäägi 1 (kui arv a annab k-ga jagamisel jäägi 1, siis ka selle mistahes positiivse astendajaga aste a^m annab k-ga jagamisel jäägi 1). Seega teine tegur jagub arvuga n ning kogu korrutis jagub arvuga n^2.

Lahendus 2. Rakendades Newtoni binoomvalemit

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n{-}1}ab^{n-1} + b^n$$

$a = 1$ ja $b = n$ korral ning arvestades, et $\binom{n}{1} = n$, saame

$$(n+1)^n - 1 = 1 + n{\cdot}n + \binom{n}{2}n^2 + \ldots + \binom{n}{n{-}1}n^{n-1} + n^n - 1\,,$$

kus paremal pool pärast esimese ja viimase liikme koondamist kõik ülejäänud jaguvad arvuga n^2.

6. *Vastus:* ei.

Igal sammul saab piraat, kelle kuhjas on kõige vähem münte, täpselt 9 münti oma kuhja juurde ning igaüks ülejäänud piraatidest annab oma kuhjast 1 mündi ära. Seega müntide arvude vahe mistahes kahes kuhjas kas muutub täpselt 10 võrra või jääb muutumatuks. Et aga algul oli kapteni kuhjas 2002 ja pootsmani kuhjas 100 münti ning vahe $2002 - 100 = 1992$ ei jagu 10-ga, siis ei saa müntide arvud neis kahes kuhjas kirjeldatud ümberjagamise käigus ka kunagi võrdsustuda.

XII klass

1. *Vastus:* $C(2;2;0)$ või $C(-1;-1;0)$.

   Lahendus 1. Et punkt C paikneb xy-tasandil, siis peab selle z-koordinaat olema 0, s.t. $C(x;y;0)$. Et $A(0;1;2)$ ja $B(1;0;-2)$ ning kaatetid AC ja BC on võrdse pikkusega, siis

   $$(x-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2=(x-1)^2+(y-0)^2+(0-(-2))^2\ ,$$

   kust sulge avades ja sarnaseid liikmeid koondades saame $x=y$. Pythagorase teoreemist saame nüüd võrdhaarsust arvestades, et $2\cdot|AC|^2=|AB|^2$ ehk

   $$\begin{aligned}&2\cdot\left((x-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2\right)=\\&\quad=(1-0)^2+(0-1)^2+(-2-2)^2=18\ .\end{aligned}$$

   Asendades siin $y=x$ saame ruutvõrrandi $4x^2-4x+10=18$ ehk $x^2-x-2=0$, mille lahenditeks on $x=2$ ja $x=-1$.

   Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses paneme kõigepealt tähele, et $C(x;y;0)$. Kolmnurga küljevektorid $\overrightarrow{AC}=(x;y-1;-2)$ ja $\overrightarrow{BC}=(x-1;y;2)$ on võrdse pikkusega ja omavahel risti. Seega

   $$x^2+(y-1)^2+(-2)^2=(x-1)^2+y^2+2^2\ ,$$

   kust $x=y$, ning

   $$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=x\cdot(x-1)+(y-1)\cdot y+(-2)\cdot 2=0\ .$$

   Võrdust $x=y$ arvestades saame siit ruutvõrrandi $x^2-x-2=0$, mille lahenditeks on $x=2$ ja $x=-1$.

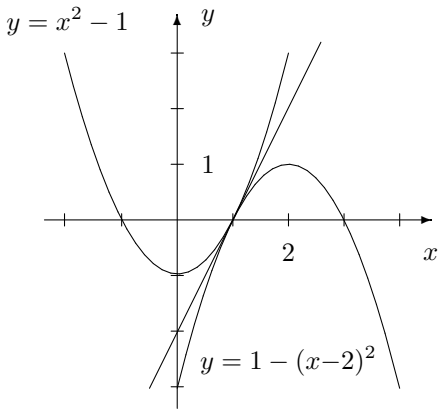
2. *Vastus:* $a=2$, puutepunkt on $(1;0)$ ja paraboolide ühise puutuja tõus selles punktis on 2.

   Lahendus 1. Paraboolid puutuvad teineteist punktis $(x;y)$, kui vastava x korral funktsioonide $y=x^2-1$ ja $y=1-(x-a)^2$ väärtused on võrdsed (s.t. $(x;y)$ on paraboolide ühine punkt) ning ka nende funktsioonide tuletiste väärtused ehk vastavate paraboolide puutujate tõusud selle x korral on võrdsed (s.t. paraboolidele selles punktis tõmmatud puutujad langevad kokku).

Et funktsiooni $y = x^2 - 1$ tuletis on $y' = 2x$ ja funktsiooni $y = 1 - (x-a)^2 = -x^2 + 2ax + 1 - a^2$ tuletis on $y' = -2x + 2a$, siis saame x ja a määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 1 - (x-a)^2 \\ 2x = -2x + 2a \end{cases}.$$

Teisest võrrandist leiame $a = 2x$ ning esimesse võrrandisse asendades saame $x^2 - 1 = 1 - (-x)^2$ ehk $2(x^2 - 1) = 0$, kust $x = \pm 1$. Et otsitav a väärtus peab olema positiivne, siis sobib ainult $x = 1$, mis annab $a = 2$ ja $y = x^2 - 1 = 0$. Seega paraboolide puutepunkti koordinaadid $a = 2$ korral on $(1; 0)$ ning nende ühise puutuja tõus selles punktis on 2 (tuletiste $y' = 2x$ ja $y' = -2x + 2a$ ühine väärtus $x = 1$ korral).



Joonis 15

Lahendus 2. Et parabool $y = x^2 - 1$ avaneb ülespoole ja parabool $y = 1 - (x-a)^2$ avaneb allapoole, siis nad puutuvad teineteist siis ja ainult siis, kui neil on täpselt üks ühine punkt. Seega on vaja leida a väärtused, mille korral ruutvõrrandil

$$x^2 - 1 = 1 - (x-a)^2 \tag{1}$$

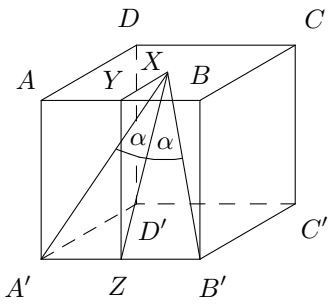
on täpselt üks lahend, s.t. vastav diskriminant on võrdne nulliga.

Teisendades selle võrrandi kujule $2x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$, leiame

$$D = 4a^2 - 8(a^2 - 2) = 16 - 4a^2$$

ning tingimusest $D = 0$ saame $a = \pm 2$. Et otsitav a väärtus peab olema positiivne, siis sobib ainult $a = 2$.

Asendades nüüd $a = 2$ paraboolide ühist punkti määravasse võrrandisse (1), saame $2x^2 - 4x + 2 = 0$, kust $x = 1$ ning $y = x^2 - 1 = 0$. Seega on paraboolide puutepunkti koordinaadid $(1; 0)$. Paraboolide ühise puutuja tõus selles punktis on võrdne funktsioonide $y = x^2 - 1$ ja $y = 1 - (x - 2)^2$ tuletiste ühise väärtusega kohal $x = 1$. Et funktsiooni $y = x^2 - 1$ tuletis on $y' = 2x$, siis otsitav puutuja tõus on 2.



Joonis 16

3. *Vastus:* $\dfrac{2}{3}$.

Lahendus 1. Olgu Y ja Z vastavalt kuubi servade AB ja $A'B'$ keskpunktid (vt. joonist 16). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kuubi serva pikkus on 2, siis $|A'Z| = |B'Z| = 1$, $|ZY| = 2$ ja $|YX| = 1$. Täisnurksest kolmnurgast XYZ saame

$$|ZX|^2 = |ZY|^2 + |YX|^2 = 4 + 1 = 5$$

ning täisnurksest kolmnurgast $A'ZX$ saame

$$|A'X|^2 = |A'Z|^2 + |ZX|^2 = 1 + 5 = 6\ .$$

Olgu $\angle A'XZ = \angle B'XZ = \alpha$, siis $\angle A'XB' = 2\alpha$ ning

$$\cos\angle A'XB' = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{|ZX|^2}{|A'X|^2} - 1 =$$
$$= 2\cdot\frac{5}{6} - 1 = \frac{2}{3}\,.$$

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame jälle, et kuubi serva pikkus on 2 ja tahu diagonaali pikkus seega $2\sqrt{2}$. Siis $|AX| = \frac{1}{2}|AC| = \sqrt{2}$ ning täisnurksest kolmnurgast $A'AX$ saame

$$|A'X|^2 = |A'A|^2 + |AX|^2 = 4 + 2 = 6\,.$$

Seega $|A'X| = |B'X| = \sqrt{6}$ ning koosinusteoreemist kolmnurgas $A'XB'$ leiame

$$\cos\angle A'XB' = \frac{|A'X|^2 + |B'X|^2 - |A'B'|^2}{2\cdot|A'X|\cdot|B'X|} = \frac{6+6-4}{12} = \frac{2}{3}\,.$$

4. *Vastus:* ei leidu.

   Mistahes 6 järjestikuse naturaalarvu hulgas on täpselt kaks sellist, mis jaguvad 3-ga. Kui aga arvude a, b, c ja d paarikaupa võetud suurimatest ühisteguritest kaks jaguvad 3-ga, siis peavad arvudest a, b, c ja d vähemalt kolm jaguma 3-ga — üldisust kitsendamata olgu need a, b ja c. Siis aga jaguvad 3-ga ka SÜT$\,(a,b)$, SÜT$\,(b,c)$ ja SÜT$\,(a,c)$, s.t. vähemalt kolm vaadeldavatest suurimatest ühisteguritest — seega ei saa need suurimad ühistegurid olla 6 järjestikust naturaalarvu.

5. *Vastus:* b) ei järeldu.

   a) Ülesandes antud võrdus

$$\frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$$

   on samaväärne võrdusega $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 0$, mis omakorda on samaväärne võrdusega

$$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i\,.$$

Seega jada kahe järjestikuse liikme vahe on konstantne ning see jada on aritmeetiline.

b) Fikseerime jada elemendid a_1, a_2, a_3 ja a_4 suvaliselt. Et võrdus

$$\frac{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{5} = a_i$$

on samaväärne võrdusega

$$a_{i+2} = 4a_i - a_{i+1} - a_{i-1} - a_{i-2} \ ,$$

siis saame jada liikmed a_5, a_6, a_7, ... üheselt leida, nii et ülesande tingimus on iga $i > 2$ korral täidetud. Ilmselt võib aritmeetilise jada omadus olla rikutud juba jada esimeste liikmetega (näiteks valides $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ja $a_4 = 1$).

6. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Olgu Mari kirjutatud arvud x ja y, siis ülemise rea keskmiseks arvuks peab Juku kirjutama $-x-y$. Edasi võib Juku kirjutada keskmisse ruutu 0, alumisse ritta vasakult paremale vastavalt $-y$, $x+y$ ja $-x$ ning keskmisse ritta vasakule $y-x$ ja paremale $x-y$ (vt. joonist 17). On lihtne kontrollida, et niiviisi ruudustiku ülejäänud ruudud täites on kõik soovitud tingimused tõepoolest täidetud.

x	$-x-y$	y
$y-x$	0	$x-y$
$-y$	$x+y$	$-x$

Joonis 17

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Joonis 18

b) Olgu ruudustik nõutaval viisil arvudega täidetud ning olgu ülemises reas vasakult paremale arvud a, b ja c, keskmises reas arvud d, e ja f ning alumises reas arvud g, h ja i (vt. joonist 18). Siis neli võrdust keskmise rea, keskmise veeru ja kummagi diagonaali

kohta annavad liitmisel

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(g+e+c)=0$$

ehk $a+b+c+d+4e+f+g+h+i=0$. Teiselt poolt aga kolm võrdust kolme rea kohta annavad

$$(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)=0\ .$$

Neist võrdustest saame $3e=0$, s.t. keskmises ruudus peab olema arv 0 ning vasakusse ülemisse ja paremasse alumisse nurgaruutu peavad seega olema kirjutatud arvud, mille summa on 0. Seega juhul, kui Mari kirjutatavate arvude summa ei ole 0, ei saa Juku ülejäänud ruutudesse arve niiviisi kirjutada, et kõik soovitud tingimused oleksid täidetud.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

Juhised lahenduste hindamiseks

Lp. hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (s.t. vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu kõigi teiste ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (s.t. ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a. testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

4. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

5. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

VII klass, I osa.

1. Antud õige vastus -9: 2 p.
   Antud vastuseks $a = 1$ ja $b = -10$, summa leidmata: 1 p.

2. Antud õige vastus $-1\frac{1}{2}$ (või $-\frac{3}{2}$ või $-1{,}5$): 2 p.
   Antud vastuseks $1\frac{1}{2}$ või $\frac{3}{2}$ või $1{,}5$): 1 p.

3. Antud õige vastus 502: 2 p.
   Antud vastuseks 501: 1 p.

4. Antud õige vastus 12: 2 p.
   Antud vastuseks 15 (loetud ka üht värvi pallide komplektid): 1 p.

5. Antud õige vastus 13: 2 p.
   Antud vastuseks õige jagatis 1003005007009: 1 p.

6. Antud õige vastus $2\frac{4}{15}$ (või $\frac{34}{15}$): 2 p.
   Antud vastuseks 2,26 või 2,27 või täpsem lähisväärtus: 1 p.

7. Antud õige vastus 15° (või $\frac{\pi}{12}$): 2 p.
   Antud vastuseks arv 15 ilma kraadimärgita: 1 p.

8. Antud õige vastus $\frac{3}{4}\pi$ (või $0{,}75\pi$): 2 p.
   Antud vastuseks 2,35 või 2,36 või täpsem lähisväärtus: 1 p.

9. Antud õige vastus 15 cm: 2 p.
   Antud vastuseks arv 15 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

10. Näidatud pinnalaotusel õige murdjoon: 2 p.

VII klass, II osa.

1. Kahe järjestikuse kohtumise vahelise päevade arvu leidmise eest: 3 p.

   Järgmise kohtumise nädalapäeva leidmise eest: 2 p.

   Järgmise kohtumise kuupäeva leidmise eest: 2 p.

   Kui mingi osa kohta on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda selle osa eest 1 punkt. Täieliku õige vastuse eest (kõik kolm osa) ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Kui järgmise kohtumise kuupäev on leitud valesti ainult sellepärast, et on eksitud päevade arvuga jaanuaris ja/või veebruaris, anda selle osa eest 1 punkt.

2. Selle ülesande kohta esitame neli hindamisskeemi vastavalt sellele, kas lahenduses kasutatakse kujundi täiendamist ruuduks ja seda, et iga vaadeldav kolmnurk moodustab poole vastavast ristkülikust või ruudust, või kasutatakse erinevate kolmnurkade pindalade võrdsust, või leitakse antud kolmnurkade pindalade kaudu kõigepealt ristküliku $ABCD$ küljepikkused, või avaldatakse kolmnurkade pindalad antud ristküliku küljepikkuste vm. sobivate suuruste kaudu.

   Lahendus ristkülikute abil (žürii lahendus 1):

   Joonise täiendamise eest ruuduks, millest kolmnurk EDC moodustab poole (ka siis, kui pole mainitud, et saadav ristkülik on ruut): 2 p.

   Tähelepaneku eest, et iga vaadeldav kolmnurk (EDC, BCD ja ABE) moodustab poole vastava ristküliku pindalast: á 1 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 2 p.

   Lahendus võrdpindsete kolmnurkade abil (žürii lahendused 2 ja 3):

   Tähelepaneku eest, et kolmnurgad ABD ja BCD on võrdse pindalaga: 1 p.

   Tähelepaneku eest, et kolmnurgad EDB ja EDC (või kolmnurgad BCD ja BCE) on võrdse pindalaga: 3 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Lahendus ristküliku $ABCD$ küljepikkuste leidmise abil (žürii lahendus 4):

Ristküliku pikema külje pikkuse leidmise eest kolmnurga EDC pindalast:	2 p.
Ristküliku lühema külje pikkuse leidmise eest kolmnurga BCD pindalast:	2 p.
Kolmnurga ABE lühema kaateti pikkuse ja pindala leidmise eest:	3 p.

Lahendus kolmnurkade pindalade avaldamise abil (žürii lahendus 5):

Ühe kolmnurga (EDC, BCD või ABE) pindala avaldamise eest sobivate lõikude pikkuste kaudu:	2 p.
Teise kolmnurga pindala avaldamise eest samade lõikude pikkuste kaudu:	2 p.
Kolmanda kolmnurga pindala avaldamise eest samade lõikude pikkuste kaudu:	1 p.
Lõppvastuse leidmise eest:	2 p.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Selle ülesande kohta esitame kaks hindamisskeemi vastavalt sellele, kas lahenduses arvutatakse välja iga paki hind ja küpsiste kogus või leitakse küpsiste 1 kg hinnad ilma pakkide hindu ja küpsiste koguseid välja arvutamata (nagu žürii lahenduses 2).

Lahendus pakkide hindade ja koguste väljaarvutamise abil:

Küpsiste koguse leidmise eest punases ja rohelises pakis:	2 p.
Punase ja rohelise paki hinna leidmise eest:	2 p.
Erinevate pakkide küpsiste 1 kg hinna leidmise või sobiva hindamise ning õige lõppjärelduse tegemise eest:	3 p.

Lahendus pakkide hindu ja koguseid välja arvutamata:

Rohelise paki küpsiste õige 1 kg hinna leidmise eest:	3 p.
Punase paki küpsiste õige 1 kg hinna leidmise või hindamise (nagu on tehtud žürii lahenduses 2) eest:	3 p.
Õige lõppjärelduse tegemise eest:	1 p.

Ainult õige vastuse eest ("punases pakis") ilma selgitusteta anda 0 punkti.

VIII klass, I osa.

1. Antud õige vastus 2: 2 p.

2. Antud õige vastus -1: 2 p.

3. Antud õige vastus 333: 2 p.
   Antud vastuseks 334: 1 p.

4. Antud õige vastus 25: 2 p.
   Antud vastuseks 24: 1 p.

5. Antud õige vastus 72: 2 p.
   Antud vastuseks arvud 72 ja 27 või ainult arv 27: 1 p.

6. Näidatud punktide B, C ja D õige paigutus: 2 p.
   Näidatud punktide B, C ja D selline paigutus, mis rahuldab tingimusi $|AB| = 2$, $|CD| = 1$ ja $|BC| = 4$, kuid üks või mõlemad punktidest B, D ei paikne lõigul AC: 1 p.

7. Antud õige vastus 20 (või 20°): 2 p.

8. Antud õige vastus 17 cm: 2 p.
   Antud vastuseks arv 17 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

9. Antud õige vastus $\frac{3}{16}a^2$ (või $0{,}1875\,a^2$): 2 p.
   Antud vastuseks arv $\frac{3}{16}$ või 0,1875: 1 p.

10. Näidatud pinnalaotusel õige murdjoon: 2 p.

VIII klass, II osa.

1. Näitamise eest, et kolme järjestikuse naturaalarvu summana esituvad parajasti 3-ga jaguvad arvud: 2 p.

Näitamise eest, et viie järjestikuse naturaalarvu summana esituvad parajasti 5-ga jaguvad arvud: 2 p.

Nende tähelepanekute alusel otsitavate arvude leidmise eest: 3 p.

Kui esimeses kahes lõigus toodud väited on esitatud ilma põhjenduseta, anda nende eest á 1 punkt. Kui vastuses on antud ka arv 0, anda 1 punkt vähem.

Ainult õige vastuse eest (kõik kuus õiget arvu) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui on antud ka nende arvude esitused 3 ja 5 järjestikuse naturaalarvu summana, ent pole selgitatud, kuidas need arvud leiti või miks selliseid arve rohkem pole, siis anda 4 punkti. Kui vastuseks on antud neli või viis õiget arvu või lisaks õigetele arvudele ka üksikuid mittesobivaid arve, anda 1 punkt (kui on antud ka nende arvude esitused summadena, siis 2 punkti).

2. Idee eest avaldada kolmnurga pindala rööpküliku pindala ja ülejäänud kolme kolmnurga pindalade vahena: 1 p.

   Ülejäänud kolme kolmnurga pindalade avaldamise eest rööpküliku pindala kaudu: 4 p.

   Lahenduse lõpuleviimise ja õige lõppvastuse saamise eest: 2 p.

   Kui lahenduses on vaadeldud mingit erijuhtu (nt. ristkülikut, rombi või ruutu) ning lahenduskäik kasutab oluliselt tehtud lisaeeldusi, siis anda mitte üle 4 punkti. Kui lahenduskäik tehtud lisaeeldusi ei kasuta ja on mainitud, et sama arutlus sobib ka üldjuhul, siis erijuhu vaatlemise eest punkte mitte maha võtta; kui seda mainitud ei ole, anda 1 punkt vähem.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Selle ülesande lahendamisel arutletakse tõenäoliselt väga erinevatel viisidel. Mittetäielike lahenduste hindamisel tuleks järgnevat hindamisskeemi, mis põhineb ühel võimalikul arutlusel, kasutada võrdluseks arutluse üksikute etappide osakaalu määramisel.

   Edasi-tagasi lennule koos vahepeatusega linnas B kulunud aja leidmise eest: 1 p.

   Ainult edasi-tagasi lennule (arvestamata vahepeatust linnas B) kulunud aja leidmise eest: 1 p.

Ühes suunas lennule (linnast A linna B või linnast B linna A) kulunud aja leidmise eest: 2 p.

Linnast B väljalennu kellaaja leidmise eest linna A kohaliku aja järgi: 1 p.

Linnade A ja B ajavahe ning lõppvastuse leidmise eest: 2 p.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

IX klass, I osa.

1. Antud õige vastus 5: 2 p.

2. Antud õige vastus $-2\frac{2}{15}$ (või $-\frac{32}{15}$): 2 p.

   Antud vastuseks $-2{,}13$ või $-2{,}14$ või täpsem lähisväärtus: 1 p.

3. Antud õige vastus 252: 2 p.

   Antud vastuseks 251: 1 p.

4. Antud õige vastus 8: 2 p.

   Antud vastuseks arvud -7 ja 8 või ainult arv -7: 1 p.

5. Antud õige vastus 45: 2 p.

   Antud vastuseks õige korrutis 7777622223: 1 p.

6. Märgitud sirgel mõlemad sobivad punktid: 2 p.

   Märgitud sirgel üks sobiv punkt (teine punkt märkimata või valesti märgitud): 1 p.

7. Antud õige vastus 45° (või $\frac{\pi}{4}$): 2 p.

   Antud vastuseks arv 45 ilma kraadimärgita: 1 p.

8. Antud õige vastus 1440° (või 8π): 2 p.

   Antud vastuseks arv 1440 ilma kraadimärgita: 1 p.

9. Antud õige vastus $ab - b^2$ (või sellega võrdne avaldis): 2 p.

10. Näidatud pinnalaotusel õige murdjoon: 2 p.

IX klass, II osa.

1. Murdude õige viimise eest ühisele nimetajale: 2 p.

   Saadud murru lugeja ja/või nimetaja sobiva teisendamise eest näitamaks, et need on teineteisest saadavad märkide muutmisega: 5 p.

2. Kolmnurga CAK võrdhaarsuse ärakasutamise eest: 2 p.

   Kolmnurga LBC võrdhaarsuse ärakasutamise eest: 2 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Osa a) lahenduse eest kokku: 4 p.

   Näitamise eest, et kolme järjestikuse naturaalarvu summana esituvad parajasti 3*-ga jaguvad arvud:* *2* p.

   Tähelepaneku eest, et arvu ruut jagub 3*-ga parajasti siis, kui arv ise jagub* 3*-ga:* *1* p.

   Selle alusel a) osa õige vastuse leidmise eest: *1* p.

   Osa b) lahenduse eest kokku: 3 p.

   Tähelepaneku eest, et nelja järjestikuse naturaalarvu summana annab 4*-ga jagamisel jääg*i 2*:* *1* p.

   Selle alusel näitamise eest, et naturaalarvu ruut ei esitu nelja järjestikuse naturaalarvu summana: *2* p.

   Kui a) osas väide, et kolme järjestikuse naturaalarvu summana esituvad parajasti 3-ga jaguvad arvud, on esitatud ilma põhjenduseta, anda selle eest 1 punkt. Kui sobivaks arvuks on loetud ka 0 ja seetõttu saadud vale vastus, anda 1 punkt vähem.

   Ainult a) osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, b) osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4. Selle ülesande lahendamisel arutletakse tõenäoliselt väga erinevalt. Alltoodud hindamisskeemi, mis põhineb küll ühel võimalikul arutlusel, tuleks ka teistsuguste mittetäielike lahenduste hindamise juures

kasutada võrdluseks arutluse üksikute etappide osakaalu määramisel.

Idee eest loendada diagonaali üleminekuid ühest kuubist teise: 1 p.

Sobiva loendamisstrateegia määratlemise eest (žürii lahenduses risttahuka tahkudega paralleelsed tasandid): 2 p.

Sellel strateegial põhineva arutluse eest, mis tõestab, et diagonaali üleminekuid ühest kuubist teise on ülimalt 9: 2 p.

Põhjenduse eest, miks neid üleminekuid on täpselt 9 (žürii lahenduses: diagonaal ei lõika mitut tasandit korraga): 2 p.

Kui selle, miks diagonaali üleminekuid ühest kuubist teise on täpselt 9, või ekvivalentse väite põhjendamisel on mainitud asjaolu, et arvud 3, 4 ja 5 on ühistegurita, siis anda selle osa eest vähemalt 1 punkt.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

X klass

1. Jagatava teisendamise eest harilikuks murruks: 2 p.

   Jagaja teisendamise eest harilikuks murruks: 2 p.

   Õige jagatise leidmise eest hariliku murruna: 1 p.

   Jagatise teisendamise eest lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks: 2 p.

   Ainult lõpmatu perioodilise kümnendmurruna antud õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, hariliku murruna antud vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Determinantide õige lahtikirjutamise eest: 2 p.

   Ainult x ja ainult y sisaldavate ruutvõrrandite saamise eest: 3 p.

   Nende ruutvõrrandite lahendamise ja õige lõppvastuse leidmise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, kui on leitud kõik 4 lahendit; 2 või 3 lahendi eest anda 1 punkt, 1 lahendi eest 0 punkti.

3. Näite eest a) osa jaoks: 2 p.

   Põhjenduse eest, miks b) osa jaoks sobivat kolmnurka ei leidu: 2 p.

   Näidete eest c) ja d) osa jaoks: 3 p.

   Kui on toodud näide ainult c) osa või ainult d) osa jaoks ja teine näide puudub või on väidetud, et selliste küljepikkustega kolmnurka ei leidu, siis anda viimase lõigu eest 1 punkt.

   Ainult kõigi nelja osa õigete vastuste eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui mõne osa vastus puudub või on vale, siis selgituste puudumisel anda 0 punkti.

4. Näitamise eest, et nurk AOB (või nurk AMB) on $120°$: 2 p.

   Kolmnurga BMO võrdkülgsuse näitamise eest: 2 p.

   Kolmnurga BRO võrdkülgsuse näitamise eest: 2 p.

   Lõppjärelduse tegemise eest: 1 p.

5. Tähelepaneku eest, et $c < a + b$: 1 p.

   Võrratuse $b \geqslant 502$ kehtivuse näitamise eest: 2 p.

   Võrratuse $b \leqslant 999$ kehtivuse näitamise eest: 2 p.

   Näite eest, et $b = 502$ on võimalik: 1 p.

   Näite eest, et $b = 999$ on võimalik: 1 p.

   Kui on saadud võrratus $b \geqslant 501$ või $b \leqslant 1000$ ja pole kontrollitud, kas sellise b jaoks sobivaid kolmnurki leidub, anda vastava osa eest 1 punkt. Kui on saadud selline võrratus ja on põhjendatud, et sellise b jaoks sobivat kolmnurka siiski ei leidu, siis lugeda see võrdväärseks vastavalt võrratuse $b \geqslant 502$ või $b \leqslant 999$ tõestamisega.

   Ainult õige vastuse (*mõlemad* arvud 502 ja 999) eest ilma selgitusteta ja näideteta anda 1 punkt, ühe õige arvu eest anda 0 punkti.

6. Idee eest vaadelda ruudustiku 4 keskmist ruutu: 2 p.

   Tähelepaneku eest, et tahvlid küljepikkustega üle 50 katavad igal juhul kõik need ruudud: 2 p.

   Tähelepaneku eest, et tahvel küljepikkusega 50 katab igal juhul ühe neist ruutudest: 2 p.

   Lõppjärelduse tegemise eest: 1 p.

XI klass

1. Võrrandi teisendamise eest kujule $P(x) = Q(x)$, kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on polünoomid: 2 p.

   Võrrandi $4x^3 + 6x^2 = 0$ (või sellega ekvivalentse) saamise eest: 2 p.

   Lahendite $x = 0$ ja $x = -\frac{3}{2}$ leidmise eest: 2 p.

   Kontrolli eest, et mõlemad lahendid sobivad: 1 p.

   Kontrolli eest 1 punkti andmiseks lugeda piisavaks, kui on mainitud, et mõlema lahendi korral on esialgse võrrandi murdude nimetajad erinevad nullist (või on tehtud arvutused, kust see on näha).

   Ainult õige vastuse (*mõlemad* lahendid) eest ilma selgitusteta ja sobivuse kontrollita anda 1 punkt, ainult ühe lahendi eest 0 punkti. Kui lahendite sobivust on kontrollitud, aga nende leidmise kohta selgitused puuduvad, anda mõlema lahendi eest 2 punkti ja ühe lahendi eest 1 punkt.

2. Esimesel sammul (graafiku nihutamise järel) saadava funktsiooni õige leidmise eest: 2 p.

   Teisel sammul (graafiku peegeldamise järel) saadava funktsiooni õige leidmise eest: 3 p.

   Saadud funktsiooni määramispiirkonna leidmise eest: 1 p.

   Saadud funktsiooni muutumispiirkonna leidmise eest: 1 p.

   Kui esimese sammu tõlgendamisel on tehtud viga, aga teisel sammul on seda funktsiooni edasi teisendatud õigesti, anda teise sammu eest 2 punkti. Kui leitud funktsioon ei ole küll õige, kuid õige funktsiooniga sarnase kujuga ning selle määramis- ja/või muutumispiirkond on leitud õigesti, siis anda neist kummagi leidmise eest ikkagi 1 punkt.

   Ainult õige vastuse eest (funktsioon $y = \sqrt{-x+3}$ koos õige määramis- ja muutumispiirkonnaga) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult õige funktsiooni eest anda 1 punkt.

3. Sobivate võrrandite kirjapaneku eest, kust on võimalik leida järgmise ruudu küljepikkus 4: 2 p.

   Järgmise ruudu küljepikkuse 4 tegeliku leidmise eest koostatud võrranditest: 1 p.

Sobivate võrrandite kirjapaneku eest, kust on võimalik leida ülejäänud ruutude küljepikkused: 2 p.

Ülejäänud ruutude küljepikkuste leidmise eest: 2 p.

Kui on kirja pandud keeruline paljude võrranditega süsteem, kuid selle lahendamisega pole kuhugi jõutud, anda maksimaalselt 2 punkti (seda ka ainult juhul, kui süsteem on õige ja põhimõtteliselt lahendi leidmiseks piisav).

Ainult õige vastuse eest (kõikide ülejäänud ruutude küljepikkused) ilma selgitusteta anda 2 punkti; 6 või 7 õige küljepikkuse eest anda 1 punkt, vähem kui 6 õige küljepikkuse eest 0 punkti.

4. Võrduse saamise eest, mis seob aluse pikkust, haara pikkust ning nende lõikude pikkusi, milleks haarale tõmmatud kõrguse aluspunkt jaotab haara: 2 p.

   Arusaamise eest, et on kaks võimalikku juhtu: 1 p.

   Aluse ja haara (või haara ja aluse) suhte jaoks võrrandi saamise eest kummalgi juhul: á 1 p.

   Nendest võrranditest haara ja aluse suhte võimalike väärtuste leidmise eest: á 1 p.

   Vastavalt ülaltoodud hindamisskeemile võib lahendus, kus on vaadeldud ainult ühte kahest võimalikust juhust, saada maksimaalselt 4 punkti.

   Ainult õige vastuse eest (mõlemad võimalikud suhted) ilma selgitusteta anda 2 punkti; ainult ühe õige suhte eest anda 1 punkt.

5. Selle ülesande kohta esitame kaks hindamisskeemi vastavalt sellele, kas lahenduses kasutatakse avaldise $(n+1)^n - 1$ teguriteks lahutust (žürii lahendus 1) või binoomvalemit (žürii lahendus 2).

   Lahendus avaldise $(n+1)^n - 1$ teguriteks lahutuse abil:

   Avaldise $(n+1)^n - 1$ teguriteks lahutamise eest: 2 p.

   Tähelepaneku eest, et üks teguritest on n: 1 p.

   Põhjendamise eest, miks teine tegur jagub n-ga: 4 p.

   Lahendus binoomvalemi abil:

   Binoomvalemi õige rakendamise eest: 3 p.

Tähelepaneku eest, et $\binom{n}{1} = n$ ning üks liidetav tuleb parajasti n^2: 2 p.

Tähelepaneku eest, et pärast 1 ja -1 koondamist kõik ülejäänud liidetavad jaguvad n^2-ga: 2 p.

6. Tähelepaneku eest, et igal sammul üks piraat saab täpselt 9 münti juurde ja igaüks ülejäänutest kaotab 1 mündi: 2 p.

   Järelduse eest, et müntide arvude vahe mistahes kahes kuhjas jääb alati samaks *modulo* 10 (või et see kas jääb samaks või muutub täpselt 10 võrra): 2 p.

   Järelduse eest, et kapteni ja pootsmani kuhjas olevate müntide arvud ei saa kunagi võrdseks: 3 p.

   Teises alalõigus mainitud 2 punkti saamiseks piisab ka sellest, kui vastav järeldus on sõnastatud ainult kapteni ja pootsmani kuhjade jaoks.

   Ainult õige vastuse "ei" eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

XII klass

1. Arusaamise eest, et punkti C z-koordinaat on 0: 1 p.

   Kolmnurga võrdhaarsusest võrduse $x = y$ saamise eest: 2 p.

   Kolmnurga täisnurksusest ruutvõrrandi saamise eest x või y jaoks: 2 p.

   Võrrandi lahendamise ja õige lõppvastuse leidmise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse (*mõlemad* sobivad punktid) ilma selgitusteta anda 2 punkti, ainult ühe sobiva punkti eest anda 1 punkt.

2. Selle ülesande kohta esitame kaks hindamisskeemi vastavalt sellele, kas lahenduses kasutatakse paraboole määravate funktsioonide tuletiste võrdsust puutepunktis (žürii lahendus 1) või seda, et paraboolide ainus ühine punkt on nende puutepunkt (žürii lahendus 2).

   Lahendus tuletiste võrdsustamise abil:

   Arusaamise eest, et puutepunkt on punkt, kus langevad kokku nii paraboole määravate funktsioonide kui ka nende tuletiste väärtused: 2 p.

Nende tingimuste kirjapaneku eest võrranditena x ja a suhtes: 1 p.

Saadud võrrandisüsteemi lahendamise eest, arvestades a positiivsuse nõuet: 2 p.

Puutepunkti y-koordinaadi leidmise eest: 1 p.

Paraboolide ühise puutuja tõusu leidmise eest: 1 p.

Lahendus paraboolide ainsa ühise punkti leidmise abil:

Arusaamise eest, et paraboolide ainus ühine punkt on nende puutepunkt: 1 p.

Selle tingimuse esitamise eest kujul $D = 0$, kus D on vastava ruutvõrrandi diskriminant: 2 p.

Sellest tingimusest väärtuse $a = 2$ leidmise eest (arvestades positiivsust): 1 p.

Puutepunkti x-koordinaadi leidmise eest: 1 p.

Puutepunkti y-koordinaadi leidmise eest: 1 p.

Paraboolide ühise puutuja tõusu leidmise eest: 1 p.

Ainult *täieliku* õige vastuse eest (a väärtus, puutepunkti koordinaadid ja puutuja tõus) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastus sisaldab kolmest komponendist õigesti kaks, anda 1 punkt, ainult ühe õige komponendi eest 0 punkti.

3. Selle ülesande kohta esitame kaks hindamisskeemi vastavalt sellele, kas lahenduses kasutatakse nurga $A'XB'$ poolitamist (žürii lahendus 1) või koosinusteoreemi (žürii lahendus 2).

Lahendus nurga $A'XB'$ poolitamise abil:

Lõigu $A'X$ või $B'X$ pikkuse leidmise eest: 2 p.

Nurga $\frac{\angle A'XB'}{2}$ siinuse või koosinuse leidmise eest: 2 p.

Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Lahendus koosinusteoreemi abil:

Lõigu $A'X$ või $B'X$ pikkuse leidmise eest: 2 p.

Idee eest kasutada koosinusteoreemi kolmnurgas $A'XB'$: 2 p.

Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Tähelepaneku eest, et mistahes 6-st järjestikusest naturaalarvust täpselt kaks jaguvad 3-ga: 2 p.

   Järelduse eest, et siis peaksid arvudest a, b, c ja d vähemalt kolm jaguma 3-ga: 2 p.

   Järelduse eest, et siis peaksid nende suurimatest ühisteguritest vähemalt kolm jaguma 3-ga: 2 p.

   Saadud vastuolu põhjal õige lõppjärelduse tegemise eest: 1 p.

   Ainult õige vastuse "ei leidu" eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

5. Osa a) lahenduse eest kokku: 4 p.

   Näitamise eest, et antud võrdus on samaväärne võrdusega $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 0$*:* *1* p.

   Selle võrduse esitamise eest kujul $a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i$*:* *1* p.

   Siit järeldamise eest, et jada on aritmeetiline: *2* p.

   Osa b) lahenduse eest kokku: 3 p.

   Tähelepaneku eest, et nelja esimese liikme väärtused võime valida suvaliselt: *1* p.

   Siit järelduse tegemise eest, et jada ei tarvitse olla aritmeetiline: *2* p.

6. Osa a) lahenduse eest: 3 p.

   Osa b) lahenduse eest: 4 p.

   Kui on tõestatud, et keskmises ruudus peab alati olema 0, kuid ei ole sellest järeldatud, et juhul b) ei ole soovitud tulemuse saamine alati võimalik, siis anda selle eest 3 punkti.

   Osa b) lahenduseks piisab ka konkreetsest kontranäitest — peab olema põhjendatud, miks selliste arvude korral ülejäänud ruute soovitud viisil täita ei saa, kuid seejuures ei tarvitse olla jõutud tulemuseni, et keskmises ruudus peab kindlasti olema 0.

   Ainult õige vastuse ("jah" ja "ei") eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.