Lahtine võistlus 2016 sügis

Ülesanded **2**
Noorem rühm 2
Vanem rühm 3

Ülesanded vene keeles **4**
Младшая группа 4
Старшая группа 5

Lahendused **6**
Noorem rühm 6
Vanem rühm 11

Hindamisskeemid **19**
Noorem rühm 19
Vanem rühm 22

Võistluskomplekti koostamisse panustasid:

Urve Kangro
Oleg Košik
Härmel Nestra
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Kati Smotrova

Matemaatika lahtine võistlus

24. september 2016 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Vanaaastaõhtul kurdab Ats, et uuel aastal on tema sünnipäev reedel ja 13. kuupäeval. Pets lohutab teda, et vähemasti pole see päev aasta 13. reede. Kas on võimalik, et Pets eksib, kui pole teada, millisel aastal toodud vestlus toimub?

2. Tahvlil on 11 murdu, mille lugejad ja nimetajad on parajasti kõik täisarvud 1-st 22-ni. Milline on suurim võimalik täisarvulise väärtusega murdude arv?

3. Juku püstitas matemaatikaringis järgmise hüpoteesi: alati, kui mingi kahe ühistegurita täisarvu x ja y korrutis jagub mingi kahe ühistegurita täisarvu a ja b korrutisega, siis vähemalt üks arvudest x ja y jagub arvuga a või b. Kas Juku hüpotees peab paika?

Märkus. Öeldakse, et täisarvud a ja b on *ühistegurita*, kui $\text{SÜT}(a, b) = 1$.

4. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1. \end{cases}$$

5. Leia kõik võimalused, mitu teravnurka saab olla kumeras hulknurgas.

6. Kas leidub selline positiivne täisarv n, millel on täpselt 9 positiivset tegurit ja mille kõik tegurid saab paigutada 3×3 tabelina nii, et igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil olevate arvude korrutis oleks sama?

Matemaatika lahtine võistlus

24. september 2016 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Ringjoon c_1 läbib punkte koordinaatidega $(0;1)$, $(-1;-1)$ ja $(1;0)$, ringjoon c_2 aga punkte koordinaatidega $(0;1)$, $(-1;-1)$ ja $(1;-1)$. Kas c_1 raadius on suurem või väiksem kui c_2 raadius või on nende raadiused võrdsed?

2. Defineerime $a_1 = 1$ ja iga $n > 1$ korral $a_n = n \cdot a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Tõesta, et iga $n \geqslant 12$ korral $a_n > n^2$.

Märkus. Arvu x *täisosa* $\lfloor x \rfloor$ on suurim täisarv, mis ei ületa arvu x. Näiteks $\lfloor 4{,}6 \rfloor = 4$. Seega $a_2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = 3 \cdot a_1$, $a_4 = 4 \cdot a_2$, $a_5 = 5 \cdot a_2$ jne.

3. Kati ja Peeter mängivad järgmist mängu. Algul kirjutab Kati tahvlile mingi positiivse täisarvu $a > 2016$. Seejärel hakkab Peeter tahvlile arve juurde kirjutama, lisades igal sammul sinna arvu $2016b + 1$, kus b on suurim parajasti tahvlil olev arv. Peeter võidab, kui ta kirjutab mingil sammul tahvlile arvu, mis jagub 2017-ga. Kui ta seda ei suuda, on võitnud Kati. Kas Katil on võimalik mäng võita ja kui jah, siis milline on vähim tema poolt kirjutatav arv a, mille korral ta mängu võidab?

4. Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja võtavad reaalarvulisi väärtusi ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$f(x+y)f(xy) = f(x^2 - y^2 + 1).$$

5. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F. Tõesta, et

$$\frac{1}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right) < |AD| + |BE| + |CF| < \frac{3}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right).$$

6. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral saab kõik arvu n positiivsed tegurid ilma kordusteta paigutada ristkülikukujulisse tabelisse nii, et igas lahtris on täpselt üks tegur, kõik reasummad on omavahel võrdsed ja kõik veerusummad on omavahel võrdsed.

Открытое соревнование по математике

24 сентября 2016 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. В новогоднюю ночь Антон жалуется, что в новом году его день рождения приходится на пятницу и на 13-е число. Петя его утешает, что по крайней мере не является эта пятница 13-й по счёту в году. Возможно ли, что Петя ошибся, если неизвестно, в каком году происходит данный разговор?

2. На доске записано 11 дробей, числителями и знаменателями которых являются все целые числа от 1 до 22. Каково наибольшее возможное количество дробей, значения которых являются целыми числами?

3. Юра выдвинул на математическом кружке следующую гипотезу: всегда, когда произведение двух взаимно простых целых чисел x и y делится на произведение двух взаимно простых целых чисел a и b, то хотя бы одно из чисел x и y делится на a или на b. Выполняется ли гипотеза Юры?

Примечание. Говорят, что целые числа a и b *взаимно просты*, если $\text{НОД}(a, b) = 1$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b = 4c, \\ a + b^3 = c, \\ ab = -1. \end{cases}$$

5. Найти все возможности, сколько острых углов может быть в выпуклом многоугольнике.

6. Найдётся ли такое положительное целое число n, у которого ровно 9 положительных делителей, а все его делители можно расположить в таблице 3×3 таким образом, что произведение чисел каждой строки, каждого столбца и обеих диагоналей будет одинаковым?

Открытое соревнование по математике

24 сентября 2016 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Окружность c_1 проходит через точки с координатами $(0;1)$, $(-1;-1)$ и $(1;0)$, а окружность c_2 через точки с координатами $(0;1)$, $(-1;-1)$ и $(1;-1)$. Что больше, радиус c_1 или радиус c_2, или их радиусы равны?

2. Зададим $a_1 = 1$ и $a_n = n \cdot a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ для каждого $n > 1$. Доказать, что $a_n > n^2$ для каждого $n \geqslant 12$.

Примечание. Целая часть $\lfloor x \rfloor$ числа x – это наибольшее целое число, не превышающее числа x. Например, $\lfloor 4{,}6 \rfloor = 4$. Т. е. $a_2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = 3 \cdot a_1$, $a_4 = 4 \cdot a_2$, $a_5 = 5 \cdot a_2$ и т. д.

3. Катя и Петя играют в следующую игру. Вначале Катя записывает на доске какое-то целое положительное число $a > 2016$. Затем Петя дописывает на доску числа, на каждом шаге добавляя туда число $2016b + 1$, где b – наибольшее на данный момент число на доске. Петя выиграет, если на каком-то шаге запишет на доске число, делящееся на 2017. Если он это сделать не может, то выигрывает Катя. Может ли Катя выиграть игру и если да, то каково наименьшее число a, которое она должна записать на доске, чтобы выиграть?

4. Найти все функции f, определённые на множестве всех действительных чисел и принимающие действительные значения, которые при всех действительных числах x и y удовлетворяют уравнению

$$f(x+y)f(xy) = f(x^2 - y^2 + 1).$$

5. Точки D, E и F лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{1}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right) < |AD| + |BE| + |CF| < \frac{3}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right).$$

6. Найти все целые положительные числа n, при которых все положительные делители числа n можно без повторений расположить в прямоугольную таблицу так, что в каждой ячейке находится ровно один делитель, сумма чисел в каждой строке одинакова, а также сумма чисел в каждом столбце одинакова.

Lahendused

1. *Vastus:* ei.

Iga 7 järjestikuse päeva hulgas on täpselt üks reede. Et $7 \cdot 13 = 91$, siis on aasta 13. reede aasta 85.–91. päeva seas. Kolmes esimeses kuus on kokku $31 + 28 + 31$ ehk 90 päeva, liigaastal 91. Seega on aasta 13. reede kõige varem 25. märtsil ja kõige hiljem 1. aprillil. Nende päevade vahel ei ole 13. kuupäeva, millest tulenevalt on Petsi väide kindlasti tõene.

2. *Vastus:* 10.

Kui tahvlil on murrud $\frac{19}{1}, \frac{14}{2}, \frac{15}{3}, \frac{20}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{22}{11}$ ja $\frac{13}{17}$, siis neist 10 esimese väärtus on täisarv ja ainult viimase väärtus on murdarv.

Teisalt, algarvudega 13, 17 ja 19 pole võimalik moodustada muid täisarvulise väärtusega murde kui ainult $\frac{13}{1}$, $\frac{17}{1}$ ja $\frac{19}{1}$. Et 1 saab esineda vaid ühes murrus, siis vähemalt kaks neist algarvudest esinevad lugeja või nimetajana murrus, mille väärtus pole täisarv. Seega ei saa kõik 11 murdu olla täisarvulise väärtusega.

Märkus. Variante 10 täisarvulise väärtusega murruga on palju teisigi.

3. *Vastus:* ei.

Olgu $x = 20$, $y = 21$, $a = 14$, $b = 15$. Arvud x ja y on järjestikuste täisarvudena ühistegurita, samuti on a ja b järjestikuste täisarvudena ühistegurita. Korrutis $xy = 420$ jagub korrutisega $ab = 210$, kuid kumbki arvudest 20 ja 21 ei jagu kummagagi arvudest 14 ja 15.

4. *Vastus:* $a = 1, b = -1, c = 0$; $a = -1, b = 1, c = 0$; $a = 2, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{15}{8}$; $a = -2, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{15}{8}$.

Lahendus 1. Kolmandast võrrandist saame $b = -\frac{1}{a}$. Asendades selle esimesse ja teise võrrandisse, saame uue süsteemi

$$\begin{cases} a^3 - \frac{1}{a} = 4c, \\ a - \frac{1}{a^3} = c. \end{cases} \tag{1}$$

Kui $c = 0$, siis $a^3 = \dfrac{1}{a}$ ehk $a^4 = 1$, kust $a = 1$ või $a = -1$, sest $a = 0$ pole võimalik. Vastavalt saame $b = -1$ ja $b = 1$. Kui $c \neq 0$, siis jagades süsteemi (1) esimese võrrandi pooled teise võrrandi vastavate pooltega, saame

$$\frac{a^3 - \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a^3}} = 4.$$

Et $a^3 - \dfrac{1}{a} = a^2 \cdot \left(a - \dfrac{1}{a^3}\right)$, on see samaväärne võrdusega $a^2 = 4$, kust $a = \pm 2$. Kui $a = 2$, siis $b = -\dfrac{1}{2}$ ja $c = \dfrac{15}{8}$. Juht $a = -2$ annab sama lahendi vastasmärkidega.

Lahendus 2. Esimese ja teise võrrandi liitmisel saame $a^3 + a + b^3 + b = 5c$ ehk $a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) = 5c$. Et kolmanda võrrandi põhjal $1 = -ab$, on saadud seos samaväärne võrrandiga $a(a^2 - ab) + b(b^2 - ab) = 5c$ ehk $(a^2 - b^2)(a - b) = 5c$. Lahutades aga algse süsteemi esimesest võrrandist teise, saame $a^3 - a - b^3 + b = 3c$ ehk $a(a^2 - 1) - b(b^2 - 1) = 3c$, kuhu sarnaselt kolmandast võrrandist asendades saame $a(a^2 + ab) - b(b^2 + ab) = 3c$ ehk $(a^2 - b^2)(a + b) = 3c$.

Järelikult kui $c = 0$, siis $a - b = 0$ või $a + b = 0$. Kolmanda võrrandi põhjal ei ole $a = b$ võimalik. Juht $a = -b$ annab ühe võimalusena $a = 1$, $b = -1$ ning teise võimalusena $a = -1$, $b = 1$.

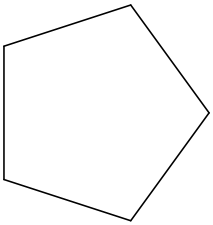
Kui $c \neq 0$, saame $\dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{3}{5}$ ehk $a = -4b$. Asendades siit algse süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame $-4b^2 = -1$, kust $b = \pm\dfrac{1}{2}$. Kui $b = \dfrac{1}{2}$, siis $a = -2$ ja $c = -\dfrac{15}{8}$. Juht $b = -\dfrac{1}{2}$ annab sama lahendi vastasmärkidega.

5. *Vastus:* 0, 1, 2, 3.

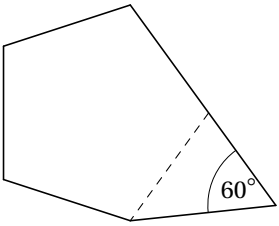
Lahendus 1. Ruudul on 0 teravnurka, täisnurksel trapetsil on 1 teravnurk, nürinurkses kolmnurgas on 2 teravnurka, teravnurkses kolmnurgas 3.

Näitame, et 4 või enam teravnurka pole võimalik. Liikudes mööda kumera hulknurga rajajoont, toimub pööramine tippudes ainult ühes suunas (nt vasakule), kusjuures alguspunkti naastes on sooritatud üks täispööre suurusega 360°. Teravnurkses tipus muutub suund korraga rohkem kui 90° võrra (suunamuutus võrdub vastava välisnurga suurusega, mis on sel juhul nürinurk). Seega kui hulknurgas oleks 4 või enam teravnurka, pöörataks ainuüksi neis kokku rohkem kui 360° võrra.

Lahendus 2. Korrapärases viisnurgas (joonis 1) on kõik nurgad suurusega $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5}$ ehk 108°, seega on seal 0 teravnurka. Pikendades üht külge



Joonis 1



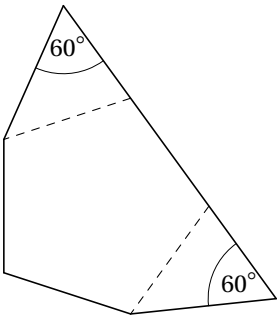
Joonis 2

ühes suunas, muutub tema liikuva otspunkti juures olev viisnurga nurk väiksemaks. Et nurk kahe mittenaaberkülje pikenduste vahel on suurusega $180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 108^\circ)$ ehk 36°, on vähenev nurk võimalik muuta teravnurgaks suurusega 60° ilma hulknurga kumerust kaotamata (joonis 2). Pikendades juba pikendatud külge ka teises suunas, saame tekitada samamoodi teisegi teravnurga suurusega 60° (joonis 3). Lõpuks nihutame pikendatud külje vastastippu sellest küljest eemale. Seda saab kumerust kaotamata teha, kuni sellegi tipu juurde tekib teravnurk (joonis 4). Tõepoolest, et selles protsessis muutumatuna püsivad nurgad on suurusega 60°, mis annavad kokku 120°, kaob viisnurga kumerus alles väheneva nurga suuruse jõudmisel 60°-ni, kui viisnurgast jääb järele korrapärane kolmnurk.

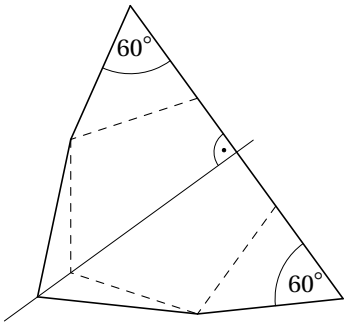
Teisalt, kui kumera n-nurga x nurka on teravnurgad, siis nende suuruste summa on väiksem kui $x \cdot 90^\circ$ ja ülejäänud nurkade suuruste summa väiksem kui $(n - x) \cdot 180^\circ$. Iga n-nurga sisenurkade suuruste summa on aga $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Kokkuvõttes

$$(n - 2) \cdot 180^\circ < x \cdot 90^\circ + (n - x) \cdot 180^\circ,$$

kust $x \cdot 90^\circ < 2 \cdot 180^\circ$ ehk $x < 4$. Seega saab kumeras hulknurgas olla vaid 0 kuni 3 teravnurka.



Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 3. Oletame, et kumeras hulknurgas on vähemalt 4 teravnurka. Olgu A, B, C ja D selle hulknurga mingid 4 tippu, mille juures on teravnurgad; eeldame, need tipud asuvad hulknurga rajajoonel selles järjestuses. Et algne hulknurk on kumer, ei ulatu nelinurga $ABCD$ küljed algsest hulknurgast välja. Seega on nelinurga $ABCD$ tippude A, B, C, D juures olevate nurkade suurused piiratud algse hulknurga vastavate tippude juures olevate nurkade suurustega, st ka need on kõik teravnurgad. Sellest tulenevalt oleks nelinurga $ABCD$ sisenurkade summa väiksem kui 360°, kuid see pole võimalik, sest nelinurga sisenurkade summa on 360°.

Näited 0 kuni 3 teravnurgaga leiame nagu lahenduses 1 või lahenduses 2.

6. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Arvul 36 on 9 positiivset jagajat $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. Paigutades need kujul

$$\begin{matrix} 18 & 1 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \\ 3 & 36 & 2 \end{matrix},$$

on iga rea, iga veeru ja kummagi diagonaali arvude korrutis 216.

Lahendus 2. Iga algarvu p korral on arvul p^8 täpselt 9 jagajat $p^0, p^1, \ldots, p^8$. On tuntud fakt, et arvud 1 kuni 9 saab paigutada 3×3 maagilise ruuduna, mille igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil olevate arvude summa on sama. Lahutades igast arvust 1, muutub iga rea, iga veeru ja kummagi diagonaali arvude summa täpselt 3 võrra väiksemaks. Asendades saadud maagilises ruudus kõik arvud i vastava astmega p^i, tekib arvu p^8 jagajate paigutus, milles iga rea, iga veeru ja kummagi diagonaali arvude korrutised on võrdsed.

Märkus. Sobivaid näiteid on teisigi. Saab näidata, et iga täpselt 9 positiivse jagajaga positiivse täisarvu n jagajad saab paigutada 3×3 tabelina, mille igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil olevate arvude korrutis on sama. Tõestuseks lähtume jagajate arvu valemist

$$\delta(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = (1 + \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_k).$$

Et jagajate arv peab olema 9 ning iga tegur valemi paremas pooles on 1-st suurem, saame kaks võimalust:

1) $k = 1$ ja $1 + \alpha_1 = 9$, millest nähtub $n = p^8$ mingi algarvu p korral;
2) $k = 2$ ja $1 + \alpha_1 = 1 + \alpha_2 = 3$, millest nähtub $n = p^2 q^2$ mingite erinevate algarvude p ja q korral.

Esimesel juhul on jagajateks arvud $p^0, p^1, \ldots, p^8$, mille võime paigutada kujul

$$\begin{matrix} p^3 & p^8 & p^1 \\ p^2 & p^4 & p^6 \\ p^7 & p^0 & p^5 \end{matrix};$$

iga rea, iga veeru ja kummagi diagonaali arvude korrutis on p^{12}. Teisel juhul on jagajateks $1, p, p^2, q, pq, p^2q, q^2, pq^2, p^2q^2$, mille võime paigutada kujul

$$\begin{array}{ccc} pq^2 & 1 & p^2q \\ p^2 & pq & q^2 \\ q & p^2q^2 & p \end{array}.$$

Iga rea, iga veeru ja kummagi diagonaali arvude korrutis on p^3q^3.

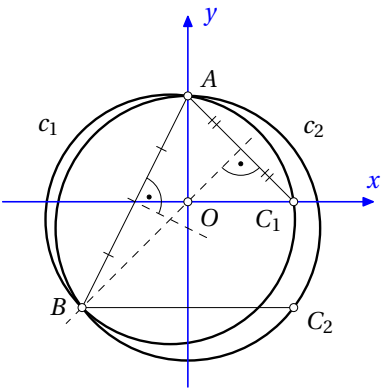
Lahendused

1. *Vastus:* c_1 raadius on väiksem kui c_2 raadius.

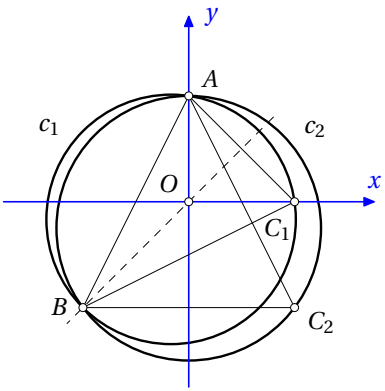
Lahendus 1. Tähistame $A(0;1)$, $B(-1;-1)$, $C_1(1;0)$ ja $C_2(1;-1)$ ning $O(0;0)$ (joonis 5). Et mõlemad ringjooned läbivad punkte A ja B, asub mõlema ringjoone keskpunkt lõigu AB keskristsirgel. Mida kaugemal lõigust AB asub ringjoone keskpunkt, seda pikem on raadius. Ringjoone c_1 keskpunkt asub lõigu AC_1 keskristsirgel ehk sirgel OB. Lõigu AB keskristsirge lõikab sirget OB punktide O ja B vahel, sest $|OB| > |OA|$. Lõikepunkti x-koordinaat on järelikult negatiivne. Ringjoone c_2 keskpunkt aga asub lõigu BC_2 keskristsirgel ehk y-teljel, seega on ringjoone c_2 keskpunkti x-koordinaat 0. Kokkuvõttes on ringjoone c_1 keskpunkt lõigule AB lähemal kui ringjoone c_2 keskpunkt, mistõttu ringjoone c_1 raadius on väiksem kui ringjoone c_2 raadius.

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 1. Lisaks olgu ringjoonte c_1 ja c_2 raadiused vastavalt r_1 ja r_2. Siinusteoreemist kolmnurkades ABC_1 ja ABC_2 (joonis 6) saame

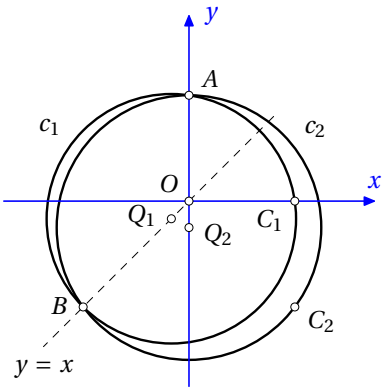
$$r_1 = \frac{|AB|}{2\sin\angle AC_1B}, \qquad r_2 = \frac{|AB|}{2\sin\angle AC_2B}. \tag{2}$$



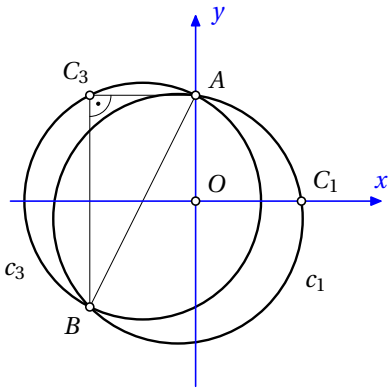
Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7



Joonis 8

Et sümmeetria põhjal $|AB| = |C_1B|$ ja $|AB| = |AC_2|$, on kolmnurgad ABC_1 ja ABC_2 võrdhaarsed ühise haaraga AB ja alusnurkadega vastavalt AC_1B ja AC_2B. Kuid võrdhaarse kolmnurga alusnurk on seda suurem, mida väiksem on tema tipunurk ja ühtlasi mida lühem on alus. Kolmnurga ABC_1 alus on AC_1 ja kolmnurga ABC_2 alus on BC_2, kusjuures $|AC_1| = \sqrt{2} < 2 = |BC_2|$. Seega $\angle AC_1B > \angle AC_2B$. Et alusnurgad on teravnurgad, siis $\sin\angle AC_1B > \sin\angle AC_2B$. Võrduste (2) põhjal saame $r_1 < r_2$.

Lahendus 3. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 2. Olgu veel ringjoone c_1 ja c_2 keskpunktid vastavalt Q_1 ja Q_2 (joonis 7).

Et punkt Q_1 asub lõigu AC_1 keskristsirgel ehk sirgel võrrandiga $y = x$, on tema koordinaadid kujul $(a; a)$. Pythagorase teoreemist saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} |Q_1C_1|^2 = (1-a)^2 + (0-a)^2, \\ |Q_1B|^2 = (-1-a)^2 + (-1-a)^2. \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $2(1+a)^2 - (1-a)^2 - a^2 = 0$, kust $a = -\frac{1}{6}$. Seega $r_1 = \frac{5}{6}\sqrt{2}$.

Et punkt Q_2 asub lõigu BC_2 keskristsirgel ehk y-teljel, on tema koordinaadid kujul $(0, b)$. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} |Q_2A|^2 = (0-0)^2 + (1-b)^2, \\ |Q_2B|^2 = (-1-0)^2 + (-1-b)^2. \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $1 + (1+b)^2 - (1-b)^2 = 0$, kust $b = -\frac{1}{4}$. Seega $r_2 = \frac{5}{4}$.

Arvude $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ ja $\frac{5}{4}$ suurusvahekord on sama mis $\frac{12}{5}$ korda suurematel arvudel $2\sqrt{2}$ ja 3. Et $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, siis $r_1 < r_2$.

Märkus. Võib tekkida kiusatus põhjendada väidet, et c_1 raadius on väiksem, lihtsalt sellega, et punkt C_1, mis asub ringjoone c_1 peal, jääb ringjoone c_2 sisepiirkonda, või et punkt C_2, mis asub ringjoone c_2 peal, jääb ringjoonest c_1 välja. Tegelikult ei ole see piisav põhjendus. Defineerime näiteks $C_3 = (-1, 1)$ ja vaatame ringjoont c_3, mis läbib punkte A, B ja C_3 (joonis 8). Punkt C_3 jääb ringjoonest c_1 välja, kuid ringjoone c_3 raadius $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ on sellegipoolest väiksem kui ringjoone c_1 raadius $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ (c_3 on vähim ringjoon, mis läbib punkte A ja B, sest tema keskpunkt asub lõigul AB).

2. *Lahendus 1.* Et $a_n = n \cdot a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, siis ülesande väite tõestamiseks piisab näidata, et iga $n \geqslant 12$ korral $a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geqslant n$. Kuna $n \leqslant 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 < 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, piisab selle väite tõestamiseks näidata, et iga $m \geqslant 6$ korral $a_m \geqslant 3m$. Võrduse $a_m = m \cdot a_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ põhjal piisab selleks omakorda näidata, et $l \geqslant 3$ korral $a_l \geqslant 3$. See aga ilmselt kehtib, sest $a_l = l \cdot a_{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor} \geqslant l$.

Lahendus 2. Järjest välja arvutades saame

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	8	10	18	21	64	72	100	110	216	234	294	315
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Seega $12 \leqslant n < 16$ korral ülesande väide kehtib.

Tõestamaks väidet suuremate arvude jaoks, paneme tähele, et iga $k \geqslant 4$ korral

$$a_{2^k} = 2^k \cdot 2^{k-1} \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 2^{k+(k-1)+\ldots+1} = 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \geqslant 2^{2(k+1)}.$$

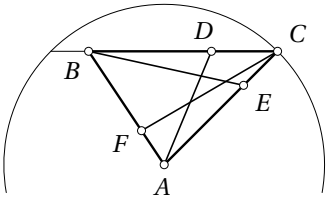
Samuti näitab lihtne induktsioon, et a_n suureneb n kasvades. Valides suvalise $n \geqslant 16$ jaoks $k \geqslant 4$ nii, et $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, saame

$$a_n \geqslant a_{2^k} \geqslant 2^{2(k+1)} = \left(2^{k+1}\right)^2 > n^2.$$

3. *Vastus:* jah, 2019.

Arv $2016b + 1$ annab 2017-ga jagades sama jäägi nagu arv $-b + 1$. Seega tekkivate arvude jäägid 2017-ga jagades on samad nagu arvudel jadas $b, -b + 1, -(-b + 1) + 1, \ldots$. Et $-(-b + 1) + 1 = b$, on see jada perioodiga 2, mistõttu erinevaid jääke on ülimalt 2. Kokkuvõttes viib arv a Kati võidule parajasti siis, kui a ega $-a + 1$ ei jagu 2017-ga.

Seega arv $a = 2017$ ei vii võidule, sest jagub 2017-ga, ning samuti ei vii võidule arv $a = 2018$, kuna $-2018 + 1$ jagub 2017-ga. Arvu $a = 2019$ puhul aga ei jagu 2017-ga ei 2019 ega $-2019 + 1$, mistõttu see viib võidule.



Joonis 9

4. *Vastus:* $f(x) = 0$, $f(x) = 1$.
Asendades antud võrdusse $y = 0$, saame iga x korral

$$f(x)f(0) = f(1 + x^2). \tag{3}$$

Asendades algsesse võrdusse aga $x = 0$, saame iga y korral

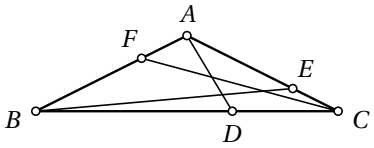
$$f(y)f(0) = f(1 - y^2). \tag{4}$$

Kui $f(0) = 0$, siis järeldub võrdusest (3) $f(t) = 0$ iga reaalarvu $t \geqslant 1$ korral (sest iga $t \geqslant 1$ jaoks leidub x, nii et $t = 1 + x^2$) ning võrdusest (4) $f(t) = 0$ iga reaalarvu $t \leqslant 1$ korral (sest iga $t \leqslant 1$ jaoks leidub y, nii et $t = 1 - y^2$). Kokkuvõttes $f(t) = 0$ iga reaalarvu t korral. See funktsioon rahuldab ka algset võrrandit.

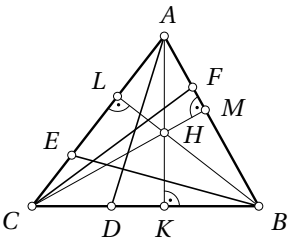
Kui $f(0) \neq 0$, siis saame võrdusest (3) $f(x) = \dfrac{f(1 + x^2)}{f(0)} = f(-x)$ iga reaalarvu x korral ehk f on paarisfunktsioon. Võttes algses võrrandis $y = -x$, saame $f(0)f(-x^2) = f(1)$ ehk $f(-x^2) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$. Et iga mittepositiivne arv esitub kujul $-x^2$ ja $f(x^2) = f(-x^2)$, siis $f(t) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$ iga reaalarvu t korral. Võttes $t = 1$, saame $f(0) = 1$, kust $f(t) = 1$ iga reaalarvu t korral. See funktsioon rahuldab ka algset võrrandit.

5. *Lahendus 1.* Üldisust kitsendamata $|BC| \geqslant |CA| \geqslant |AB|$.
Tõestame algul teise võrratuse. Vaatame ringjoont keskpunktiga A, mis läbib tippu C, ja külje CB pikendust üle tipu B selle ringjooneni (joonis 9). Et ringjoone kõõl asub ringjoone sees, siis $|AD| \leqslant |AC|$. Samuti kehtivad võrratused $|BE| \leqslant \max(|BC|, |BA|) = |BC|$ ja $|CF| \leqslant \max(|CA|, |CB|) = |CB|$. Et kolmnurgavõrratusest tulenevalt $\dfrac{1}{2}|BC| < \dfrac{1}{2}|CA| + \dfrac{1}{2}|AB|$, siis

$$\begin{aligned} |AD| + |BE| + |CF| &\leqslant 2|BC| + |CA| < \\ &< \frac{3}{2}|BC| + \frac{3}{2}|CA| + \frac{1}{2}|AB| < \\ &< \frac{3}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right). \end{aligned}$$



Joonis 10



Joonis 11

Tõestame nüüd esimese võrratuse. Kui kolmnurk pole teravnurkne, siis $|BE| \geqslant |BA|$ ja $|CF| \geqslant |CA|$ (joonis 10). Et kolmnurgavõrratuse põhjal $\frac{1}{2}|BC| < \frac{1}{2}|CA| + \frac{1}{2}|AB|$, siis

$$\begin{aligned} |AD| + |BE| + |CF| &\geqslant |AD| + |BA| + |CA| > \\ &> |BA| + |CA| > \\ &> \frac{1}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right). \end{aligned}$$

Teravnurkse kolmnurga korral on $|AD| \geqslant |AK|$, $|BE| \geqslant |BL|$ ja $|CF| \geqslant |CM|$, kus AK, BL ja CM on kolmnurga ABC kõrgused. Olgu veel H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt (joonis 11). Saame

$$\begin{aligned} &|AD| + |BE| + |CF| \geqslant \\ &\quad \geqslant |AK| + |BL| + |CM| > \\ &\quad > |AH| + |BH| + |CH| = \\ &\quad = \frac{1}{2}(|BH| + |CH|) + \frac{1}{2}(|CH| + |AH|) + \frac{1}{2}(|AH| + |BH|) > \\ &\quad > \frac{1}{2}\left(|BC| + |CA| + |AB|\right), \end{aligned}$$

kus viimane võrratus tuleneb kolmnurgavõrratustest.

Lahendus 2. Kasutades kolmnurga võrratust, saame

$$\begin{aligned} |AB| &\leqslant |BD| + |AD| \quad \text{(võrdus juhul } D = B\text{)}, \\ |CA| &\leqslant |CD| + |AD| \quad \text{(võrdus juhul } D = C\text{)}, \\ |BC| &\leqslant |CE| + |BE| \quad \text{(võrdus juhul } E = C\text{)}, \\ |AB| &\leqslant |AE| + |BE| \quad \text{(võrdus juhul } E = A\text{)}, \\ |CA| &\leqslant |AF| + |CF| \quad \text{(võrdus juhul } F = A\text{)}, \\ |BC| &\leqslant |BF| + |CF| \quad \text{(võrdus juhul } F = B\text{)}. \end{aligned}$$

Et kõik võrdusjuhud ei saa realiseeruda koos, saame nende võrratuste liitmisel range võrratuse

$$2\left(|BC|+|CA|+|AB|\right) < |BC|+|CA|+|AB|+2\left(|AD|+|BE|+|CF|\right).$$

Sarnaste liikmete koondamisel ja poolte jagamisel 2-ga saame vasakpoolse nõutud võrratuse

$$\frac{1}{2}\left(|AB|+|AC|+|BC|\right) < |AD|+|BE|+|CF|.$$

Samuti saame kolmnurga võrratusest

$$\begin{aligned}
|AD| &\leqslant |AB| + |BD| \quad \text{(võrdus juhul } D = B\text{)},\\
|AD| &\leqslant |CA| + |CD| \quad \text{(võrdus juhul } D = C\text{)},\\
|BE| &\leqslant |BC| + |CE| \quad \text{(võrdus juhul } E = C\text{)},\\
|BE| &\leqslant |AB| + |AE| \quad \text{(võrdus juhul } E = A\text{)},\\
|CF| &\leqslant |CA| + |AF| \quad \text{(võrdus juhul } F = A\text{)},\\
|CF| &\leqslant |BC| + |BF| \quad \text{(võrdus juhul } F = B\text{)}.
\end{aligned}$$

Jällegi ei saa kõik võrdusjuhud realiseeruda koos, mistõttu saame nendegi võrratuste liitmisel range võrratuse

$$2\left(|AD|+|BE|+|CF|\right) < 2\left(|BC|+|CA|+|AB|\right) + |BC|+|CA|+|AB|.$$

Sarnaste liikmete koondamisel ja poolte jagamisel 2-ga saame parempoolse nõutud võrratuse

$$|AD|+|BE|+|CF| < \frac{3}{2}\left(|BC|+|CA|+|AB|\right).$$

6. *Vastus:* 1.

Lahendus 1. Oletame, et arvu n jaoks leidub selline tegurite paigutus $k \times l$ tabelina. Eeldame üldisust kitsendamata, et $k \leqslant l$ (k on ridade arv). Olgu igas veerus arvude summa s; et kuskil tabelis esineb arv n, siis $s \geqslant n$, kusjuures võrdus saab kehtida ainult juhul $k = 1$.

Iga j korral, kus $j = 1, 2, \ldots, l$, olgu d_j suurim arv j-ndas veerus; üldisust kitsendamata $d_1 > d_2 > \ldots > d_l$. Et arvu n tegurid saavad olla $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots$, siis sellest võrratuste ahelast tulenevalt kehtib

$$d_l \leqslant \frac{n}{l}. \tag{5}$$

Kuna aga veeru keskmine ei ületa veeru maksimumi, kehtib

$$d_l \geqslant \frac{s}{k} \geqslant \frac{n}{k}. \tag{6}$$

Võrratustest (5) ja (6) saame kokku $\frac{n}{k} \leqslant \frac{n}{l}$. Seega $k \geqslant l$ ning koos eeldusega $k \leqslant l$ kokkuvõttes $k = l$. Seetõttu peab võrratustes (5) ja (6) kehtima võrdusjuht ehk muuhulgas $s = n$. Ent viimane on võimalik ainult juhul $k = 1$, st ristküliku mõõtmed on 1×1. Järelikult on arvul n vaid 1 tegur ehk $n = 1$.

Lahendus 2. Ilmselt $n = 1$ ainsa teguri paigutus rahuldab tingimusi. Eeldame järgnevas, et mingi $n > 1$ jaoks on nõutud paigutus olemas.

Vaatleme algul juhtu, kus n on 2 aste. Siis kõik tegurid peale 1 on paarisarvud. Et kõigil 1-st suurematel arvudel on vähemalt 2 tegurit, peab tabelis olema üldisust kitsendamata vähemalt 2 veergu, kuid ühes veerus on arvude summa paaritu ja teistes paaris, mis on vastuolus ülesande tingimusega.

Järgnevas eeldame, et arvul n on vähemalt üks paaritu algarvuline tegur; olgu $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, kus $s \geqslant 1$, $p_1 < \ldots < p_s$ on algarvud ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ on positiivsed täisarvud. Tähistagu $\delta(n)$ ja $\sigma(n)$ vastavalt arvu n kõigi positiivsete tegurite arvu ja nende summat. Et tabelis esineb ka arv n, on iga rea- ja veerusumma vähemalt n. Et kas ridu või veerge on kokku vähemalt $\sqrt{\delta(n)}$, siis kehtib võrratus $\sigma(n) \geqslant n\sqrt{\delta(n)}$; kuna mitme rea korral on veerusumma suurem kui n, üheainsa rea korral aga veergude arv suurem kui $\sqrt{\delta(n)}$, on see võrratus range. Tähistades $f(n) = \dfrac{\sigma(n)}{n\sqrt{\delta(n)}}$, saame järelikult

$$f(n) > 1. \tag{7}$$

Definitsioonist järeldub, et $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_s^{\alpha_s})$. Uurime f käitumist algarvude astmetel. Näeme, et kehtib kaks monotoonsuse omadust:

1) algarvude p, q korral kui $p < q$, siis $f(p) > f(q)$;

2) suvalise algarvu p ja positiivse täisarvu k korral $f(p^k) > f(p^{k+1})$.

Esimese omaduse tõestuseks võime kirjutada

$$\frac{f(q)}{f(p)} = \frac{1+q}{q\sqrt{2}} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{1+p} = \frac{1+\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p}} < \frac{1+\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} = 1.$$

Teise omaduse tõestuseks saame analoogselt

$$\begin{aligned}
\frac{f(p^{k+1})}{f(p^k)} &= \frac{1+p+\ldots+p^{k+1}}{p^{k+1}\sqrt{k+2}} \cdot \frac{p^k\sqrt{k+1}}{1+p+\ldots+p^k} = \frac{1+\frac{1}{p(1+p+\ldots+p^k)}}{\sqrt{1+\frac{1}{k+1}}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1+\frac{1}{p+p^{k+1}}}{\sqrt{1+\frac{1}{k+1}}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1+\frac{1}{2+2^{k+1}}}{\sqrt{1+\frac{1}{k+1}}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{2+2^{k+1}}\right)^2}{1+\frac{1}{k+1}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{1+2^k}+\frac{1}{(2+2^{k+1})^2}}{1+\frac{1}{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Et $\left(2+2^{k+1}\right)^2 = 4+2^{k+3}+2^{2k+2} > 2^k+2^{2k} = 2^k(1+2^k)$, siis

$$1+\frac{1}{1+2^k}+\frac{1}{\left(2+2^{k+1}\right)^2} < 1+\frac{1}{1+2^k}+\frac{1}{2^k(1+2^k)} = 1+\frac{1}{2^k}.$$

Järelikult

$$\frac{f(p^{k+1})}{f(p^k)} < \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^k}}{1+\frac{1}{k+1}}} \leqslant \sqrt{\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}}} = 1,$$

sest $2^k \geqslant k+1$ iga $k \geqslant 1$ korral.

Paneme tähele, et $f(2)\cdot f(3) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{3\sqrt{2}} = 1$. Omadusele (1) tuginedes saame sellest võrratused $f(2) > 1 > f(3)$. Nüüd omaduse (2) abil

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot f(p_s^{\alpha_s}) \leqslant f(p_1)\cdot\ldots\cdot f(p_s).$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $p_1 = 2$ (ja ühtlasi $s \geqslant 2$), sest vastasel korral saame korrutisse lisada 1-st suurema teguri $f(2)$. Seega omaduse (1) ja $f(3) < 1$ tõttu

$$f(n) \leqslant f(2)\cdot f(p_2)\cdot\ldots\cdot f(p_s) \leqslant f(2)\cdot(f(3))^{s-1} \leqslant f(2)\cdot f(3) = 1,$$

mis on aga vastuolus võrratusega (7).

Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)*

Tüüpiliste lahenduste eest, mis põhinevad kontrollil, et 13. märts ei sobi ja ka 13. aprill ei sobi, anti punkte järgnevalt.

- Kontrollitud, et üks neist ei sobi: 3 p
- Lisaks tehtud tähelepanek, et on vaja kontrollida ka teist: 4 p
- Teise võimaluse kontroll on olemas, aga puudulik: 5 p
- Täislahendus: 7 p

Tüüpiliste lahenduste eest, mis kas tabeli, iteratsiooni või arvutustega leiavad kuupäevade vahemiku, kus võib asuda 13. reede, anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Peaaegu täislahendus väikese aritmeetilise veaga: 6 p
- Vahemik on nihutatud ülimalt 1 päeva võrra (nt sellepärast, et liigaasta juhtum on valesti läbi vaadatud): 5 p
- Vahemik on nihutatud rohkem, kuid idee on õige: 4 p
- Toodud õige täpne vahemik (25.03-01.04) ilma selgitusteta: 4 p
- Toodud mõni suurem vahemik ilma piisava selgituseta: 2 p

Kui lahendus peaaegu vastas mõnele skeemi punktile, kuid sisaldas ebatäpsust või viga, siis reeglina sai ta 1 võrra vähem punkte.

2. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Põhjendus, et 11 täisarvulist murdu ei saa olla: 2 p
- Korrektne näide 10 täisarvulise murru jaoks: 5 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Näide 9 murru jaoks: *2 p*
  - Näide 8 või vähema murru jaoks: *0 p*

Põhjendus, miks ei saa tahvlil olla 11 täisarvulist murdu, peab olema esitatud üldjuhu jaoks, ehk *ükskõik kuidas* ei püüaks 11 sellist murdu konstrueerida, pole see võimalik. Mõnikord esitati selgitus 11 murru mittevõimalikkuse kohta vaid töös esitatud konstruktsioonile tuginedes.

3. *(Triinu Veeorg)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus väikese loogikaveaga: 6 p
- Ülesande seisukohast kasutud tegevused: 0 p

Suurem osa õpilastest proovis tõestada, et hüpotees kehtib, selle asemel, et üritada kontranäidet leida. Väga palju uuriti arvude x, y, a, b paarsust, mis õiges lahenduses otsest rolli ei mänginud. Samuti vaadati paljudes töödes ainult juhtu, kus x, y, a, b on algarvud. Sellisel juhul küll väide kehtib, aga kuna ülesanne on palju laiem (kõik täisarvud), siis sellel juhul Juku hüpoteesi tõestamise eest punkte ei antud.

4. *(Markus Rene Pae)*

- Saadud ühe muutuja suhtes võrrand $(a^2-4)(a^4-1)=0$: 2 p
  Sealhulgas:
  - Saadud samaväärne tegurdamata kujul võrrand: *1 p*
- Selle võrrandi kaudu leitud lahendid $a=-1, b=1, c=0$ ja $a=1, b=-1, c=0$: 2 p
- Sama võrrandi kaudu leitud lahendid $a=-2, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{15}{8}$ ja $a=2, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{15}{8}$: 3 p

Selle ülesande puhul võib lugeda tüüpveaks seda, kui oli võrrandisüsteemist tuletatud võrrand ning saadud võrrandist jagatud mõlemad pooled tundmatut sisaldava teguriga läbi, seejuures lisamata tingimust, et tegur ei võrdu nulliga. Sellise meetodiga kaotasid päris paljud lahendajad pooled leitavatest lahenditest.

5. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Näide 0 teravnurgaga kumerast hulknurgast: 1 p
- Näide 1 teravnurgaga kumerast hulknurgast: 1 p
- Näide 2 teravnurgaga kumerast hulknurgast: 1 p
- Näide 3 teravnurgaga kumerast hulknurgast: 1 p
- Tõestus, et teistsuguse teravnurkade arvuga kumerat hulknurka ei leidu: 3 p

Mõned lahendajad eeldasid, et uuritavas hulknurgas endas on kõik nurgad võrdsed. Selliseid lahendusi hinnati selle järgi, kui palju oli neid hulknurki kasutatud sobivate näidete toomiseks.

Tõestuse osas tegi lahendajat eelduse, et uuritavas kumeras hulknurgas on kõik teravnurgad võrdsed ja/või kõik nürinurgad võrdsed. Vastavalt sellele, kui oluline roll sellel eeldusel lahenduses oli, võeti selle eest maha kuni 1 punkt.

Mõnes töös omistati tõestuse osas hulknurga teravnurkade või nürinurkade suurusteks konkreetsed väärtused, näiteks 89° või $179{,}99\ldots^\circ$. Sellistes tõestustes pidi õigeks lugemiseks kindlasti olemas olema ka üleminek konkreetsetelt väärtustelt üldjuhule, näiteks võrdluse vormis.

6. *(Mark Gimbutas)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgmiselt.

- Esitatud idee kasutada mingi algarvu a astmeid $a^0, a^1, \ldots, a^8$: 3 p
- Toodud näide täpselt 9 positiivse teguriga täisarvust, mille tegureid on põhimõtteliselt võimalik nõutud viisil tabelisse paigutada (aga mida lahendaja pole teinud või on valesti teinud): 3 p
- Toodud näide täpselt üheksa positiivse teguriga täisarvust ja 3×3 tabelist, kus tegurid nõutud viisil paiknevad: 7 p
- Esitatud žürii lahenduse märkuses esinev konstruktsioon sobivate näidete tekitamiseks. 7 p

Ülesande peamine raskuskoht tundus olevat täisarvu teguri mõiste tundmine ja aru saamine väljendist „täpselt 9 tegurit“. Meenutuseks: täisarvu n teguriks nimetatakse iga täisarvu, millega arv n jagub. Esiteks, tegur aeti väga tihti sassi algteguriga ja otsiti üheksa algteguriga täisarve (kordusi arvestades või mitte arvestades, olenevalt maitsest). Näiteks pakkusid paljud õpilased lahenduseks arvu kujul x^9 (x oli enamasti 1, 2 või 3) ja vastavat 3×3 tabelit, mille igas lahtris oli x. Sellisel juhul on arvu x^9 teguriteks aga ka näiteks x^2 ja x^3 ning (kui x on algarv) on tegureid kokku hoopis 10 (erinevat). Teiseks ei tulnud paljudele lahendajatele meelde, et arvud 1 ja n ise on ka täisarvu n tegurid. Kolmandaks, mõned lahendajad pidasid arvu n teguriks mistahes (reaal)arvu, millega on võimalik arvu n jagada. Üle poole ülesannet proovinud võistlejatest jõudsid siiski väga erinevaid arutluskäike pidi järeldusele, et soovitud omadusega arvu ei ole olemas.

Ülesannet proovis lahendada 103 õpilast, neist punkte said 44 õpilast, nende seast maksimumi 25 õpilast. Täispunktide saamiseks piisas ühe konkreetse soovitud omadusega arvu ja vastava tabeli esitamisest, ülesande ära lahendanud õpilased valisid enamasti oma näiteks arvu 36, 100 või 256.

Hindamisskeemid

1. *(Ksenia Niglas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Õige vastus: 1 p
- Pandud tähele, et kaks vaadeldavat kolmnurka on võrdhaarsed sama haarapikkusega: 1 p
- Arvutatud ümbermõõdud: 1 p
- Väidetud, et pikema ümbermõõduga kolmnurgal on suurem ümberringjoon (eeldusel, et kaks külge on sama pikad): 1 p
- Kasutatud ringjoone võrrandit $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$: 1 p
- Pandud tähele, et kolmnurkadel on üks ühine külg ning märgitud, et mõlema ümberringjoone keskpunkt asub selle külje keskristsirgel: 1 p
- Joonise pealt vaadatud (ilma põhjenduseta), et üks keskpunkt asub kolmnurkade ühisele küljele lähemal, ja sellest lähtuvalt ülesanne lahendatud: 4 p
- Täislahendus ühe või mitme arvutusveaga või veidi puuduliku selgitusega (sõltuvalt vea olulisest): 5–7 p
- Täislahendus: 7 p

Skeemi teisest kuuenda reani märgitud osade eest antavad punktid võisid liituda, kuid kokku ei antud üle 3 punkti, kui polnud tehtud edasist progressi.

Mitmes lahenduses oli väidetud, et kui kahel kolmnurgal on erinevad vaid ühe külje pikkused, siis pikem kolmas külg tähendab ka pikemat ümberringjoont, kuid see on tõene vaid võrdhaarse kolmnurga puhul (kui kaks külge on eri pikad ja teha nende vahelise nurga väikseks, siis kolmanda külje pikkus väheneb, aga ümberringjoone raadius hoopis suureneb). Üldiselt oli ülesannet lahendatud hästi.

2. *(Kristjan Kongas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Arvutatud paljude n väärtuste jaoks a_n ja/või väidetud, et a_n kasvab väga kiiresti: 0 p
- Leitud, et $a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} > n$ on ekvivalentne ülesande väitega: 1 p
- Kirjutatud välja tingimus $a_n = n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \cdot \ldots$: 1 p

- Osad jaguvuse juhud läbi vaatamata lahenduses, mis muidu on täielik: 4–5 p
- Täislahendus: 7 p

Skeemi kolmanda rea olukorras polnud peaaegu kunagi tegu unustamisega, vaid ligikaudsete lähendustega, mida kasutati, sest ei osatud alamosa/võrratusi õigesti teisendada. Lõplik punktisumma sõltus sellest, kui palju juhte jäi vaatamata ja sellest, kas lahendaja sai aru, et osad juhud on vaatamata.

Ühe punkti võis kaotada väikeste vigade eest põhjendustes. Kui tegu oli tabeli arvutamisel tekkinud veaga ja see lahenduse sisulist poolt ei mõjutanud, siis selle eest punkti maha ei võetud.

3. *(Ahti Peder)* Anname kaks erinevat hindamisskeemi vastavalt erinevatele lähenemistele.

Žürii lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vaadatud arvu a kujul $a = 2017t + b$, kus b on arvu a jagamisel 2017-ga tekkiv jääk: 1 p
- Leitud, et Peetri esimesena kirjutatud arv on 2017 järgi kongruentne arvuga $-b + 1$: 2 p
- Leitud, et Peetri teisena kirjutatud arvu jääk jagamisel 2017-ga on jälle b: 2 p
- Eelnevast tehtud järeldus, et jäägid jäävad korduma ja esimene sobiv väärtus Kati võiduks on $a = 2019$: 2 p

Arvude järjestikusel läbivaatusel põhineva lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud $a = 2017$ korral, et Peetri esimene arv ei jagu 2017-ga: 1 p
- Näidatud $a = 2017$ korral, et Peetri teine arv jagub 2017-ga: 1 p
- Näidatud $a = 2018$ korral, et Peetri esimene arv jagub 2017-ga: 1 p
- Näidatud $a = 2019$ korral, et Peetri kirjutatud arvude jäägid jagamisel 2017-ga jäävad korduma ning tehtud järeldus, et siis Kati võidab: 4 p

Mitmes töös ei pandud tähele nõuet $a > 2016$, pakkudes Katile soodsaks lahenduseks näiteks $a = 2$.

4. *(Heiki Niglas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Õige vastus: 1 p
- Asenduse $y = -x$ kaudu võrduse $f(0)f(-x^2) = f(1)$ saamine: 1 p
- Võrduse $f(x) = f(-x)$ saamine: 1 p
- Asenduse $y = 0$ või $x = 0$ (kuid mitte asenduse $x = y = 0$) kasutamine: 1 p
- Võrduse $f(1 - x) = f(1 + x)$ saamine: 1 p

- Lahendus, mis pole arvestanud juhtu $f(0) = 0$: 4 p
- Täislahendus mõne üksiku näpuveaga või puudusega: 5–6 p
- Täislahendus: 7 p

Paljudele õpilastele valmistas raskusi funktsionaalvõrrandi olemuse mõistmine – et tuleb leida funktsioon(id), mitte x ja y. Samuti olid paljud jätnud arvestamata, et funktsioon võib saada ka väärtuse 0 (eriti juht $f(0) = 0$ jäeti kõrvale).

5. *(Janno Veeorg)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud võrratus $\frac{1}{2}(|BC| + |CA| + |AB|) < |AD| + |BE| + |CF|$ teravnurkse kolmnurga jaoks: 2 p
- Tõestatud võrratus $\frac{1}{2}(|BC| + |CA| + |AB|) < |AD| + |BE| + |CF|$ nürinurkse kolmnurga jaoks: 2 p
- Tõestatud võrratus $|AD| + |BE| + |CF| < \frac{3}{2}(|BC| + |CA| + |AB|)$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Toodud välja, et $|AD| \leqslant \max(|AB| + |AC|)$ või sarnane väide lõigu $|BE|$ või $|CF|$ kohta: *1 p*

Üksikuid punkte võis kaotada väikeste vigade eest põhjendustes.

Lahendused, kus üritati väita, et teises võrratuses on halvim juht siis, kui kaks külge lähevad hästi suureks ja üks hästi väikseks, üldjuhul punkte ei saanud. Samuti ei antud punkte väite eest, et $|AD|$, $|BE|$ ja $|CF|$ on suuremad kolmnurga vastavatest kõrgustest.

6. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud arvu 1 sobivus: 1 p
- Põhjendatud teiste arvude mittesobivus: 6 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Vaadeldud vaid $1 \times m$, $n \times 1$ või $2 \times m$, $n \times 2$ tabeleid: *0 p*
  - Märgitud üldjuhul, et iga rea/veeru arvude summa on vähemalt n: *1 p*
  - Põhjendatud võrratus $\sigma(n) \geqslant n\sqrt{\delta(n)}$, kus $\sigma(n)$ ja $\delta(n)$ on vastavalt n tegurite summa ja tegurite arv: *1 p*
  - Väide tõestatud ruudukujulise tabeli korral; tõestus pole vahetult üldistuv: *2 p*
  - Üldjuhul sihileviivad ideed realiseeritud poolikult: *2 p*
  - Täislahendus, kus üks juht analüüsitud vigaselt: *5 p*

Skeemi esimese rea eest punkti saamiseks pidi töös olema mingigi vihje sellele, et õpilane saab vastuse tähendusest aru. Ainuüksi lause „$n = 1$ sobib“ eest punkti ei antud. Punkti saamiseks piisas arvu 1 joonistamisest kastikesse (kujutades 1×1 tabelit).

Põhiskeemi teise rea alamskeemi teise rea eest anti punkt ainult juhul, kui väide oli esitatud üldjuhu kohta. Punkti ei antud, kui väide esitati kontekstis, kus oli vaid 2 rida või 2 veergu.

Paljud õpilased mõistsid teksti oodatust erinevalt. Kaks laialt levinud valearusaama olid järgmised.

- Teguritena arvestati vaid algtegureid.
- Ei mõistetud, et kõik tegurid tuleb tabelisse ära paigutada.