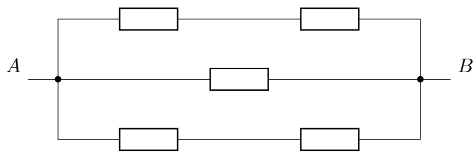
Eesti koolinoorte 71. füüsikaolümpiaad

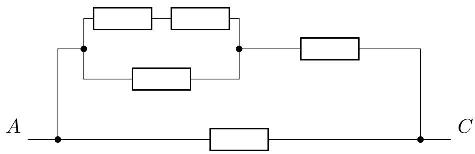
6. aprill 2024. a. Lõppvoor
Põhikooli ülesannete lahendused (10.–12. klass)

1. (*VOOLUAHEL*) (*6 p.*) *Autor: Eero Vaher*

Takistuse R_{AB} leidmiseks sobib esimene ekvivalentskeem, millelt on näha, et $R_{AB} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R}\right)^{-1} = R/2$ ehk $R = 2R_{AB}$.



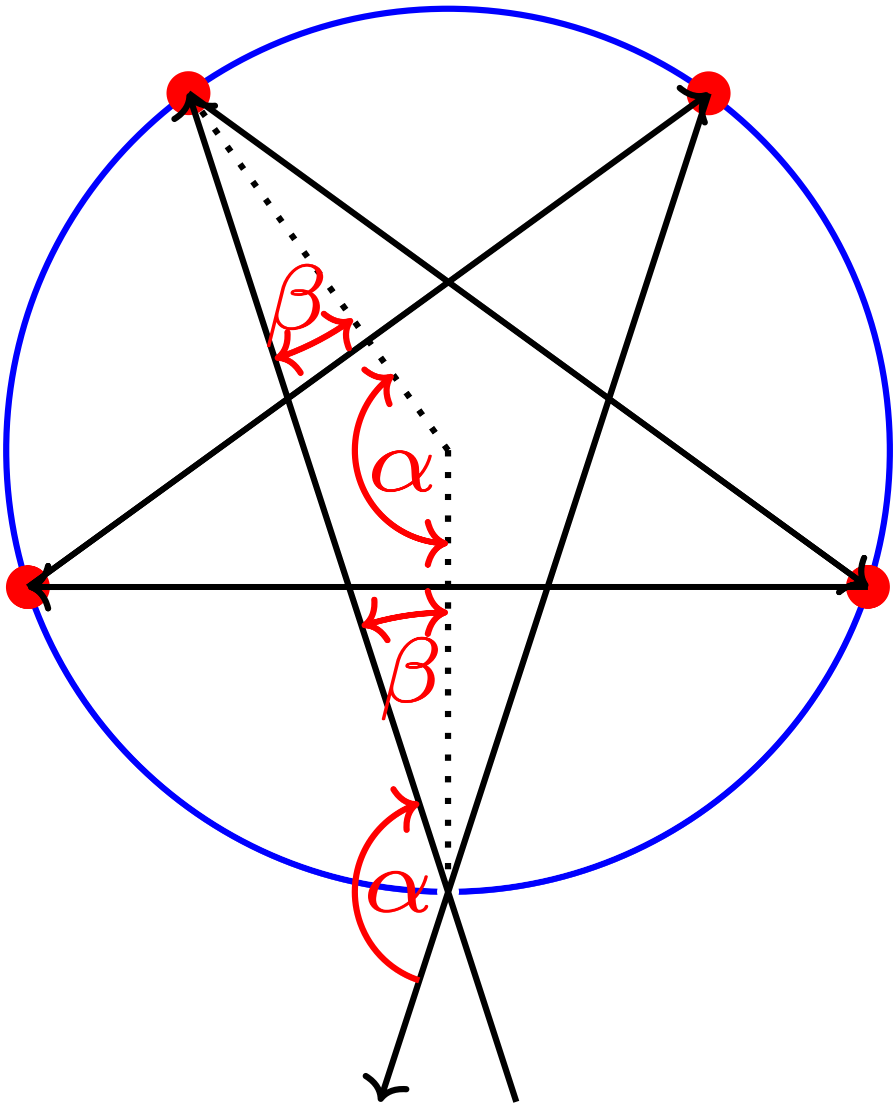
Takistuse R_{AC} leidmiseks sobib teine skeem, millelt on näha, et $R_{AC} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R+R}\right)^{-1}}\right)^{-1} = \frac{5}{8}R = \frac{5}{4}R_{AB} = 15\,\Omega$.



2. (*PEEGELKERA*) (*6 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Sümmeetria tõttu siseneb ja väljub kiir peegli pinnanormaali suhtes ühe ja sama nurga $\beta = (180° - \alpha)/2 = 18°$ all. Järelikult moodustab kahe järjestikuse peegelduse vaheline kiirelõik koos peegelduspunktidest tõmmatud raadiustega võrdhaarse kolmnurga alusnurkadega β ning tipunurgaga, mis on ühtlasi kõõlule vasstavaks kesknurgaks suurusega $180° - 2\beta = \alpha$. Kui kiir teeb enne väljumist n peegeldust, siis peavad vastavad kesknurgad katma täispöörde $360°$ täisarv m kordi. Seega $n = 360° \cdot m/144° - 1$, kus m on vähim täisarv, mille korral saame täisarvulise vastuse. Katsetamise teel on lihtne näha, et $m = 2$ ja $n = 4$.

Illustreerimiseks on allpool toodud joonis, kus on kujutatud ülesandele vastav kiirte käik klaaskera suurringis (lõige, mis läbib kera keskpunkti).



3. (*AKNAPESUVEDELIK*) (*6 p.*) *Autor: Richard Friedrichs*

Et aknapesuvedelikku mitte üle ääre ajada tuleb lifti tõsta nii, et see jääb kogu aeg horisontaalseks. Selleks, et lift püsiks tasakaalus, peab kehtima jõumomentide tasakaal (analoog kangi reegliga, kus pöörlemine toimub ümber tünni põhja keskpunkti ning trossid rakendavad jõudu kangi otstesse). Et tünn asub vasemale trossile d võrra lähemal kui paremale, on vasak õlg

$l_{vasak} = \frac{l}{2} - \frac{d}{2} = 0{,}75\,\mathrm{m}$ ja parem õlg $l_{parem} = \frac{l}{2} + \frac{d}{2} = 1{,}25\,\mathrm{m}$. Seega saame tasakaaluvõrrandi

$$0{,}75\,\mathrm{m} \cdot F_{vasak} = 1{,}25\,\mathrm{m} \cdot F_{parem}$$

Kuna lift jääb kogu aeg horisontaalseks, peavad lifti mõlemad otsad läbima sama teepikkuse (igas ajavahemikus). Seega saame jõuõlgade valemis asendada jõud töödega ning saame võrrandi

$$0{,}75\,\mathrm{m} \cdot A_{vasak} = 1{,}25\,\mathrm{m} \cdot A_{parem}$$

kust saame avaldada $A_{parem} = A_{vasak} \cdot \frac{0{,}75\,\mathrm{m}}{1{,}25\,\mathrm{m}} = A \cdot \frac{0{,}75}{1{,}25} = 0.6A$

4. (*ELEKTRITÕUKERATAS*) (*8 p.*) *Autor: Kaarel Kivisalu*

Tõukeratta liikumiskiirus on mõlemas olukorras $v = 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 6{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Tasasel maal sõites on takistusjõudude ületamiseks vaja võimsust

$$P = \frac{\eta E v}{s} = \frac{90\,\% \cdot 583{,}2\,\mathrm{Wh} \cdot 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{40\,\mathrm{km}} = 328{,}05\,\mathrm{W}. \tag{1}$$

Ülesmäge sõites kulub osa energiat potentsiaalse energia suurendamiseks võimsusega

$$P' = mgkv = 100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}01 \cdot 6{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 68{,}0\,\mathrm{W}.$$

Ülesmäge sõiteks on kogutakistusjõud võrdne tasasel maal sõites olevate takistusjõudude ja potentsiaalse energia suurendamiseks vajalike jõudude summaga. Seega ülesmäge sõitmiseks on vaja võimsust $P + P'$. Analoogselt võrrandiga (1) saame seose $P + P' = \frac{\eta E v}{s'}$, kust saame ülesmäge läbitavaks maksimaalseks kauguseks

$$\begin{aligned} s' &= \frac{\eta E v}{P + P'} = \frac{\eta E v}{\frac{\eta E v}{s} + mgkv} = s \cdot \frac{\eta E}{\eta E + mgks} \\ &= 40\,\mathrm{km} \cdot \frac{90\,\% \cdot 583{,}2\,\mathrm{Wh}}{90\,\% \cdot 583{,}2\,\mathrm{Wh} + 100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}01 \cdot 40\,\mathrm{km} \cdot \frac{1\,\mathrm{Wh}}{3{,}6\,\mathrm{kJ}}} \approx 33{,}1\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

5. (*TERMISTOR*) (*8 p.*) *Autor: Richard Luhtaru*

Olgu termistori takistus R_T. Kuna voltmeeter on ideaalne, siis läbi voltmeetri voolu ei lähe. Seega takisteid R_1 ja R läbib sama vool I_1 ning takisteid R_2 ja R_T läbib sama vool I_2. Me teame, et $I_1 R_1 + I_1 R = U$, kust $I_1 = \frac{U}{R_1 + R}$.

Sarnaselt $I_2 = \frac{U}{R_2+R_T}$. Seega pinge R_1 klemmide vahel on $I_1R_1 = \frac{UR_1}{R_1+R}$ ja pinge R_2 klemmide vahel on $I_2R_2 = \frac{UR_2}{R_2+R_T}$. Voltmeetri näit on nende pingete vahe, seega voltmeetri näit on (teades, et $R_1 = R_2$)

$$U_V = \frac{UR_1}{R_1+R} - \frac{UR_2}{R_2+R_T} = UR_1\left(\frac{1}{R_1+R} - \frac{1}{R_1+R_T}\right),$$

täpsemalt selle avaldise absoluutväärtus.

Toatemperatuuril $U_V = 0\,\mathrm{V}$, seega $\frac{1}{R_1+R} - \frac{1}{R_1+R_T} = 0$, järelikult $R = R_T$. Leiame graafikult, et temperatuuril $T = 25\,°\mathrm{C}$ on termistori takistus $R_T = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Seega $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$.

Õuetemperatuuril $U_V = 1{,}64\,\mathrm{V}$. Kuna õues on külmem, siis graafiku järgi R_T väärtus kasvab, seega eelnevalt tuletatud avaldis on $T < 25\,°\mathrm{C}$ korral positiivne, seega õige märgiga. Avaldades R_T, leiame

$$\frac{1}{R_1+R} - \frac{1}{R_1+R_T} = \frac{U_V}{UR_1}$$

$$\frac{1}{R_1+R_T} = \frac{1}{R_1+R} - \frac{U_V}{UR_1}$$

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R} - \frac{U_V}{UR_1}} - R_1$$

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{5\,\mathrm{k\Omega}+10\,\mathrm{k\Omega}} - \frac{1{,}64\,\mathrm{V}}{9\,\mathrm{V}\cdot 5\,\mathrm{k\Omega}}} - 5\,\mathrm{k\Omega} \approx 28\,\mathrm{k\Omega}$$

Graafikult leiame, et $28\,\mathrm{k\Omega}$ vastab $3\,°\mathrm{C}$. Järelikult õuetemperatuur oli $T_2 = 3\,°\mathrm{C}$.

6. (*KOKTEIL*) (*8 p.*) *Autor: Martin Rahe*

Kuna kõigi kolme mahla tihedused ja erisoojused on samad, taandub nende kokkusegamisel saadud kokteili temperatuur komponentide temperatuuride ruumalade järgi kaalutud keskmisele. $T_4 = \frac{V_1T_1+(V_2+V_3)T_2}{V_1+V_2+V_3} = 23{,}75\,°\mathrm{C}$. Kuiva jää soojenemiseks sublimeerumistemperatuurile vajalik energia on $mc_k(T_s - T_3)$ ning sublimeerumiseks kuluv energia on mh_k. Kokku saab kuiv jää kokteilist seega energiat $Q_1 = m(c_k(T_s - T_3) + h_k)$. Olgu kokteili lõpptemperatuur T. Siis kokteil saab energiat $Q_2 = c_v(T - T_4)\rho_v(V_1 + V_2 + V_3)$. Kuna kokteili ja väliskeskkonna vahel on soojusvahetus tühine, saame $Q_1 + Q_2 = 0$, kust $m(c_k(T_s - T_3) + h_k) = c_v(T_4 - T)\rho_v(V_1 + V_2 + V_3)$. Seega lõpptemperatuur on

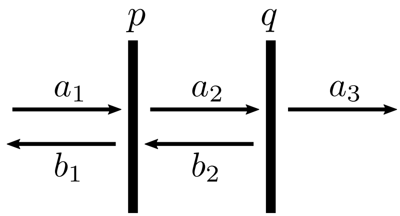
$$T = T_4 - \frac{m(c_k(T_s - T_3) + h_k)}{c_v\rho_v(V_1 + V_2 + V_3)} = 2{,}2\,°\mathrm{C}$$

Kuna saadud lõpptemperatuur on kõrgem kui vee sulamistemperatuur, jääb kokteil vedelaks ning jäätumisega ei ole vaja arvestada.

7. (*KLAASPLAADID*) (*10 p.*) *Autor: Richard Luhtaru*

a) osa lahendus 1.

Vaatleme süsteemi, kus plaatidele langeb püsiv valgusenergia a_1. Olgu edaspidi ja tagurpidi liikuvad valgusenergiad a_2, a_3, b_1 ja b_2 nagu tähistatud joonisel.



Olukorras, kus valgusenergiad on tasakaalus, kehtib võrrandisüsteem.

$$\begin{cases} b_1 = (1-p)a_1 + pb_2 \\ a_2 = pa_1 + (1-p)b_2 \\ b_2 = (1-q)a_2 \\ a_3 = qa_2 \end{cases}$$

Avaldame valgusenergiad a_3 kaudu, liikudes tagurpidi. Viimasest võrrandist

$$a_2 = \frac{1}{q}a_3.$$

Eelviimasest võrrandist

$$b_2 = (1-q)a_2 = \frac{1-q}{q}a_3.$$

Teisest võrrandist võime nüüd avaldada a_1:

$$a_1 = \frac{a_2 - (1-p)b_2}{p} = \frac{\frac{1}{q} - \frac{(1-p)(1-q)}{q}}{p}a_3 = \frac{1-(1-p)(1-q)}{pq}a_3$$

$$a_1 = \frac{p+q-pq}{pq}a_3$$

Seega summaarselt läheb läbi

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{pq}{p+q-pq}$$

osa valgusest.

a) osa lahendus 2.

Ainus võimalus, kuidas valgus plaatidest läbi saab minna, on kas minnes otse läbi kummagi plaadi (läbi läheb pq osa valgusest), või minnes läbi esimese plaadi (osa p), peegeldades mingi arv kordi plaatide vahel (iga peegelduskorraga kaotab valgus $(1-q)(1-p)$ osa energiast) ning seejärel minnes läbi teise plaadi (osa q). Liites kokku kõik sellised osavalgused, saame, et läbi plaatide mineva valguse osa on

$$k = pq + p(1-q)(1-p)q + p(1-q)^2(1-p)^2q + \cdots$$

$$k = pq\left(1 + (1-q)(1-p) + (1-q)^2(1-p)^2 + (1-q)^3(1-p)^3 + \cdots\right)$$

Kasutades lõpmatu hääbuva geomeetrilise summa valemit, leiame

$$k = \frac{pq}{1-(1-q)(1-p)} = \frac{pq}{p+q-pq}$$

b) osa lahendus 1.

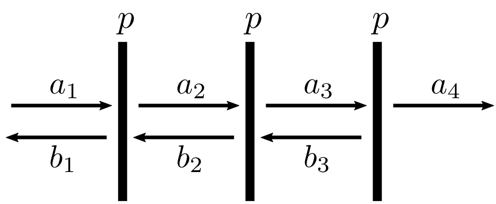
Jagame klaasplaadid kaheks alamsüsteemiks, kus esimene alamsüsteem on esimesed kaks plaati ja teine alamsüsteem on kolmas plaat. Leiame kasutades a) osa, et esimene süsteem laseb läbi $\frac{p^2}{p+p-p^2} = \frac{p}{2-p}$ osa valgusest. Seega võime mõtteliselt esimesed kaks klaasplaati asendada ühe klaasplaadiga, mis laseb läbi $\frac{p}{2-p}$ osa valgusest ja peegeldab $1 - \frac{p}{2-p}$ osa valgusest. Kasutades nüüd a) osa mõttelise plaadi ja kolmanda plaadi süsteemi jaoks, saame, et läbi läheb

$$\frac{\frac{p}{2-p}p}{\frac{p}{2-p} + p - \frac{p}{2-p}p} = \frac{p^2}{p + p(2-p) - p^2} = \frac{p}{1+2-p-p} = \frac{p}{3-2p}$$

osa valgusest.

b) osa lahendus 2.

Koostame sarnaselt a) osa lahendusega 1 võrrandisüsteemi.



$$\begin{cases} b_1 = (1-p)a_1 + pb_2 \\ a_2 = pa_1 + (1-p)b_2 \\ b_2 = (1-p)a_2 + pb_3 \\ a_3 = pa_2 + (1-p)b_3 \\ b_3 = (1-p)a_3 \\ a_4 = pa_3 \end{cases}$$

Avaldame jälle energiad a_4 kaudu, liikudes tagurpidi.

$$a_3 = \frac{1}{p}a_4$$

$$b_3 = (1-p)a_3 = \frac{1-p}{p}a_4$$

$$a_2 = \frac{a_3 - (1-p)b_3}{p} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{(1-p)^2}{p}}{p}a_4 = \frac{1-1+2p-p^2}{p^2}a_4 = \frac{2-p}{p}a_4$$

$$b_2 = (1-p)a_2 + pb_3 = \frac{(1-p)(2-p)+p(1-p)}{p}a_4$$

$$b_2 = \frac{2-3p+p^2+p-p^2}{p}a_4 = \frac{2(1-p)}{p}a_4$$

$$a_1 = \frac{a_2 - (1-p)b_2}{p} = \frac{(2-p)-2(1-p)^2}{p^2}a_4$$

$$a_1 = \frac{2-p-2+4p-2p^2}{p^2}a_4 = \frac{3p-2p^2}{p^2}a_4 = \frac{3-2p}{p}a_4$$

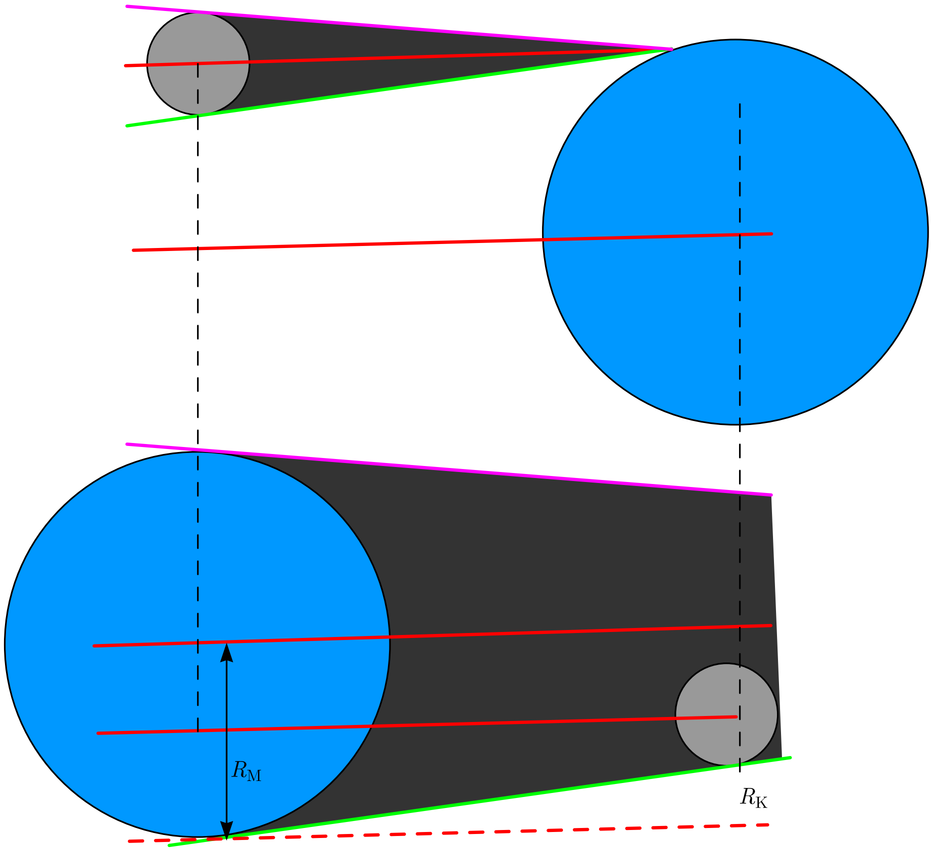
Seega läbi läheb

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{p}{3-2p}$$

osa valgusest.

8. (*VARJUTUSED*) (*10 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Päike on palju kaugemal, kui Kuu, sest nende nurkraadiused on peaaegu võrdsed, aga Kuu on hulga väiksema raadiusega. Seetõttu võime lugeda, et ühest Päikese punktist, nt alumise serva juurest, lähtuvad kiired on Maa ja Kuu juures paralleelsed. Selle põhjal saame teha juuresoleva joonise.



Joonisel on ülal kujutatud päikesevarjutus ning all — kuuvarjutus . Lillana märgitud valguskiir lähtub Päikese ülaservast, roheline alaservast ning punane — keskelt. Kuivõrd lillad, punased ja rohelised jooned on vastavalt paralleelsed, siis aheneb täisvarju koonus Maa ja Kuu vahel mõlemal juhul sama palju, st Kuu diameetri võrra. Ülemiselt jooniselt on näha, et täieliku päikesevarjutuse jaoks maksimaalne punaste joonte (mis kujutavad Päikese kespunktist Maa ja Kuu keskpunktidesse tõmmatud kiiri) vahekaugus on R_M; alumiselt jooniselt on näha, et täieliku päikesevarjutuse jaoks maksimaalne punaste joonte vahekaugus on $R_M - 2R_K$. Et $R_M > R_M - 2R_K$, siis on täielikku päikesevarjutust sagedamini, $R_M/(R_M - 2R_K) \approx 2.1$ korda.

9. (*JAHTUMINE*) (*12 p.*) *Autor: Uku Andreas Reigo*

Vedeliku jahtumisvõimsus N on võrdeline jahutatava pindala S ja temperatuuride vahega ΔT: $N \propto S\Delta T$. Kuna eeldame, et tihedus ja erisoojus ei sõltu temperatuurist, siis vedeliku temperatuuri langemise kiirus v on võrdeline jahtumisvõimsusega ja pöördvõrdeline vedeliku ruumalaga V:

$$v \propto \frac{N}{V} \propto \frac{S\Delta T}{V}.$$

Leiame soojema kokku valatud vedeliku temperatuuri T_{segu} pärast soojusliku tasakaalu saabumist. Kuna kokku segatakse võrdsed kogused vedelikke, kehtib $T_{\text{segu}} - T = T_{\text{lisa}} - T_{\text{segu}}$, millest

$$T_{\text{segu}} = \frac{T + T_{\text{lisa}}}{2} = \frac{40\,°\text{C} + 88\,°\text{C}}{2} = 64\,°\text{C}.$$

Kahe termose vedelikuga täidetud osad on sarnased koonused. Seega on nende täidetud ruumalad proportsionaalsed kõrguse kuubiga ning põhjapindalad kõrguse ruuduga. Olgu jahedama veekoonuse kõrgus h_1 ja põhja pindala S_1 ning soojema veekoonuse kõrgus h_2 ja põhja pindala S_2. Siis $\frac{S_2}{S_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$ ja $\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2^3}{h_1^3}$, millest

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}.$$

Vedelike jahtumiskiiruste suhe

$$\begin{aligned} k &= \frac{v_2}{v_1} \\ &= \frac{S_2}{S_1}\frac{V_1}{V_2}\frac{T_{\text{segu}} - T_{\text{õhk}}}{T - T_{\text{õhk}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\frac{T_{\text{segu}} - T_{\text{õhk}}}{T - T_{\text{õhk}}}. \end{aligned}$$

Millest

$$T_{õhk} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot kT - T_{\text{segu}}}{\sqrt[3]{2} \cdot k - 1} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot 1{,}62 \cdot 40\,°\text{C} - 64\,°\text{C}}{\sqrt[3]{2} \cdot 1{,}62 - 1} = 17\,°\text{C}.$$

10. (*UDU*) (*14 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Teame, et gaasides molekulide koguarv ruumalaühiku kohta ei sõltu vee molekulide suhtarvust. See omakorda tähendab, et temperatuuri langedes kasvavad molekulide arvtihedused kõikides gaasides ühtemoodi, st meie gaasisegu tihedus temperatuuril T_2 on $\rho' = \rho\rho'_k/\rho_k$. Teisest küljest teame, et selles on r protsenti veeauru. Seega, kui veeaur ei kondenseeruks piiskadeks, siis oleks niiske jahtunud õhu tihedus $\rho' = \rho'_k(1-r) + \rho'_v r$, kus ρ'_v tähistab puhta veeauru tihedust temperatuuril T_2 (kui see saaks kondenseerumata kujul antud temperatuuril eksisteerida). Seega, kui veeaur ei kondenseeruks piiskadeks, siis veeauru tihedus meie jahtunud gaasisegus oleks $r\rho'_v = \rho\rho'_k/\rho_k - \rho'_k(1-r) \approx 19{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}$. Peale kondenseerumist on veeauru tihedus ρ_m, seetõttu on uus veauru molekulide ja kõigi õhus gaasilises olekus olevate molekulide suhtarv $r' = \rho_m/\rho'_v \approx 0.012$. Vaatleme teatud hulka kuiva õhu molekule, mis täidavad enne kondenseerumist ruumala V ning peale kondenseerumist - ruumala V'. Et molekulide hulk on sama, siis $(1-r)V = (1-r')V'$, millest $V/V' = \frac{1-r'}{1-r}$. Kuivõrd vee molekulid ei kadunud ära, vaid osa neist läks üksnes piiskadesse, siis vee ja kuiva õhu molekulide summaarne suhtarv ei muutunud, st uues ruumalas V' on ka vee molekule sama palju, kui enne oli ruumalas V. Seetõttu on neis ruumalades ka kogumassid võrdsed ning uduga õhu tiheduseks saame

$$\rho'' = \rho'\frac{1-r'}{1-r} = \rho\frac{\rho'_k}{\rho_k}\frac{1-r'}{1-r} \approx 1250{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}$$

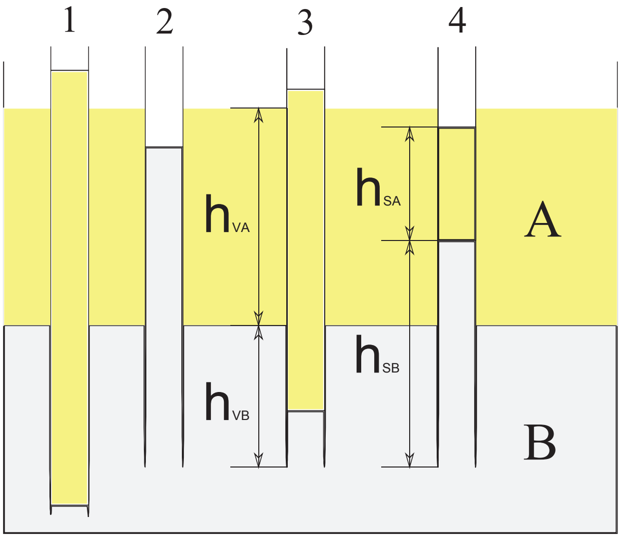
E1. (*KUULLAAGRI KUUL*) (*10 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Asetada kuul lauale, toetada joonlaud ühe otsa lähedalt vastu kuuli ja suruda samal ajal joonlaua otsa vastu lauapinda. Teine joonlaua ots kerkib üles. Mõõta, kui kõrgele see ots kerkib, olgu see nt $h = 18\,\mathrm{mm}$. Mõõta samuti kuuli kaugus joonlaua otsast, olgu see nt $a = 16\,\mathrm{mm}$, ning joonlaua kogupikkus $L = 310\,\mathrm{mm}$. Sarnastest kolmnurkadest saame kuuli diameetriks $d = ha/L \approx 0{,}93\,\mathrm{mm}$. Parima täpsuse huvides ei tohi a olla ei liiga väike ega liiga suur. Esimesel juhul on a suhteline viga suur ja teisel juhul h oma. Parima tulemuse saame, kui h ja a on umbes ühesuurused.

E2. (*VEDELIKU TIHEDUS*) (*12 p.*) *Autor: Eero Uustalu*

Ülesanne taandub vedelikusammaste rõhkude tasakaalule.

Kõrre sisse peab tekitama teise vedelikusammaste kõrguste jaotuse kui kõrrest väljas (nagu lähtub joniselt). Juhtude 1 ja 3 tekitamiseks peab ülumise vedeliku kõrre sisse imema, kõrre pealt sulgema ning uputama alumise otsa alumise (tihedama) vedeliku põhjani ning seejärel avama. Juhtude 2 ja 4 tekitamiseks peab kas tühja kõrre pealt sulgema ja uputama alumise otsa alumise (tihedama) vedelikuni ning seejärel avama või puhuma põhja ulatuva kõrre tühjaks ja lubama taastäituda.



Vajalik on eralduspinna selge eristumine, seega tuleb oodata vedelike eralduspinna selginemist.

Lähtudes rõhkude võrdsusest toru alumises otsas juhu 4 näitel:

$$p = h_{VA} \cdot \rho_A \cdot g + h_{VB} \cdot \rho_B \cdot g = h_{SA} \cdot \rho_A \cdot g + h_{SB} \cdot \rho_B \cdot g$$

$$(h_{VA} - h_{SA}) \cdot \rho_A = (h_{SB} - h_{VB}) \cdot \rho_B$$

$$\rho_A = \frac{h_{SB} - h_{VB}}{h_{VA} - h_{SA}} \cdot \rho_B$$

Kõrre täiteks on mõistlik kasutada vaid ühte vedelikest (nagu juhtudel 1 ja 2), kuna siis saab suurima vedelikusammaste kõrguste vahe.