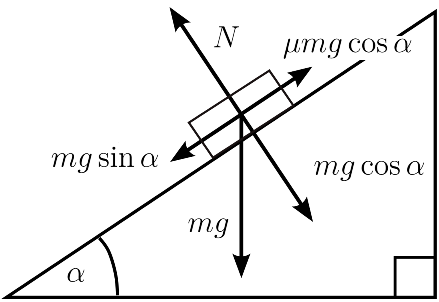
Eesti koolinoorte 71. füüsikaolümpiaad

6. aprill 2024. a. Lõppvoor
Gümnaasiumi ülesannete lahendused (10.–12. klass)

1. (*KELGUMÄGI*) (*6 p.*) *Autor: Hans Daniel Kaimre*

Lähendame Sandrat mäest alla kelgutades klotsina kaldpinnal (vt joonist). Sandrale mõjub raskusjõud $F_r = mg$, mille kaldpinna suunaline komponent on $mg \sin\alpha$ ning pinnanormaali suunaline komponent on $mg\cos\alpha$. Pinnanormaali suunaline komponent on võrdne toereaktsiooniga, st $N = mg\cos\alpha$. Kelgule mõjuv liughõõrdejõud on võrdeline toereaktsiooni ja jõõrdeteguriga: $F_h = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Seega Sandrat nõlval pidurdav jõud on $F_p = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$, kust kiirendus $a = F_p/m = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$.



Ühtlase kiirendusega liikumise kirjeldamiseks kehtib valem $s = (v^2 - v_0^2)/2a$, kus s on nihe, v keha lõppkiirus, v_0 keha algkiirus ning a kehale mõjuv kiirendus. Piirjuhul jääb Sandra nõlva lõppu jõudes seisma, st $v = 0$, kiirendus $a = -g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$ (miinusmärgiga, kuna kiirendus on keha liikumise suunaga võrreldes vastassuunas) ning nihke leiame trigonomeetriast: $s = h/\sin\alpha$. Seega

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{-v_0^2}{-2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Millest

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2hg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6\,\mathrm{m}\cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0.3\cdot\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)}{\sin 15^\circ}} = 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

2. (*RAGULKA*) (*8 p.*) *Autor: Taavi Pungas*

Kivike on raske ja väike, seega õhutakistusega pole heas lähenduses vaja arvestada. See võimaldab meil kasutada energia jäävuse seadust. Lähendame ragulka kummi kui lineaarse elastsusega materjali, st kehtib Hooke'i seadus. Kivikese lennu haripunktis on elastsusjõu potentsiaalne energia ragulka kummi venitamisel täpselt teisenenud raskusjõu potentsiaalseks energiaks:

$$\frac{kx^2}{2} = mgh.$$

Jagades läbi selle valemi teise ja esimese katse jaoks, saame

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{h_2}{h_1},$$

seega

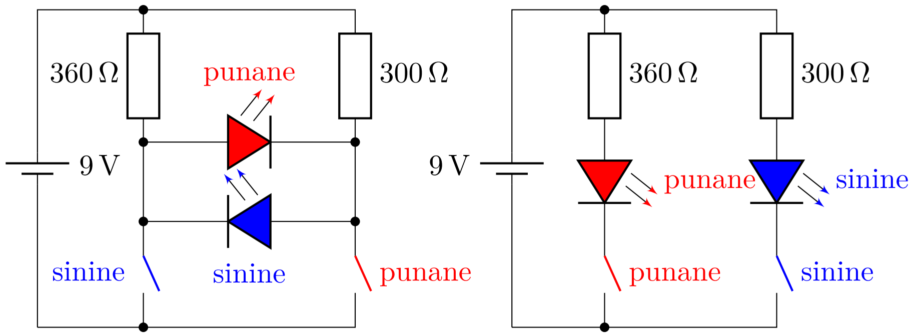
$$x_2 = x_1 \cdot \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 3\,\mathrm{cm} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} \approx 3{,}5\,\mathrm{cm}.$$

3. (*LEEDID*) (*8 p.*) *Autor: Sandra Schumann*

Patareid lühistada ei tohi, seega dioode otse patarei külge ühendada ei tohi. Järelikult peavad dioodid olema mingis kombinatsioonis jadamisi takistitega. Tahame, et dioodide põlemise korral läbiks neid voolutugevus 20 mA. Ilmselt peab vähemalt selline voolutugevus läbima ka vähemalt ühte takistit. Kui see voolutugevus läbib 300 Ω takistit, siis sellel on pingelang 6 V, läbides 360 Ω takistit oleks pinge 7,2 V.

Märkame nüüd, et dioodide põlemiseks vajalike päripingete ja soovitud voolutugevustel olevate patareide pingelangude summad saavad võrduda patarei pingega kahel juhul: punane dioodi jadamisi 360 Ω takisti ja patareiga ning sinine diood jadamisi 300 Ω takisti ja patareiga.

Rakendades tingimust, et vastavat värvi lülitit vajutades peab minema põlema vastavat värvi diood, saame kaks võimalikku skeemi:



Meil peab veel kehtima ka tingimus, et mõlema lüliti vajutamisel ei põleks kumbki diood. See on tõene ainult vasakpoolse skeemiga. Seega just see skeem tulebki koostada.

4. (*PILJARD*) (*8 p.*) *Autor: Richard Luhtaru*

a) Olgu piljardikuuli kiirus enne põrget v_0 ja pärast põrget v_1. Olgu x-telg servaga paralleelne ja y-telg servaga risti. Kuna serv mõjutab kuuli ainult y-sihis, siis kuuli x-suunaline kiirus ei muutu põrke jooksul. Seega

$$v_x = v_0 \sin 45^\circ = v_1 \sin 60^\circ \implies \frac{v_1}{v_0} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

Kuna kuuli kineetiline energia on $E = \frac{1}{2}mv^2$, siis

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

seega põrke käigus läks kaduma umbes 33% palli energiast.

b) Newtoni teisest seadusest

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \implies F\Delta t = m\Delta v.$$

Kuna jõud mõjus kuulile ainult y-suunas, siis järelikult

$$F_p t_p = m\left(v_{1,y} - v_{0,y}\right)$$

(kus loeme v_y positiivseks, kui kiirus on suunatud lauast eemale). Me teame, et

$$v_{0,y} = -v_0 \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_0,$$

$$v_{1,y} = v_1 \cos 60^\circ = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0 \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}v_0,$$

seega

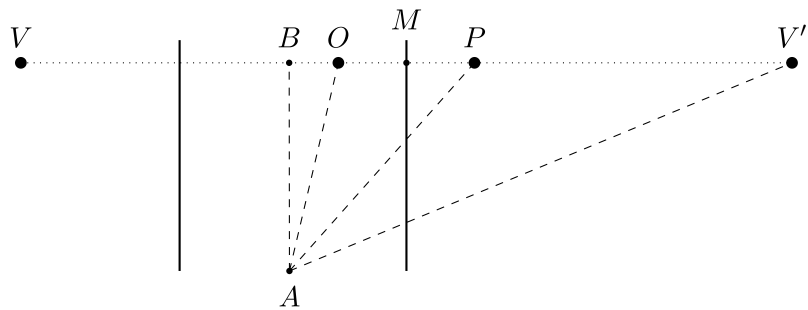
$$\Delta v_y = v_{1,y} - v_{0,y} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) v_0 \approx 1{,}115\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Keskmine kuulile mõjuv jõud oli järelikult

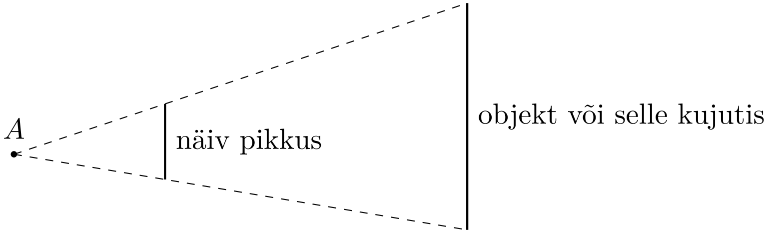
$$F_p = \frac{m\Delta v_y}{t_p} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}115\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}01\,\mathrm{s}} = 22{,}3\,\mathrm{N}.$$

5. (*JOONLAUD KORIDORIS*) (*10 p.*) *Autor: Sandra Schumann*

Teeme joonise peegelduste ja kauguste paremaks mõistmiseks. Olgu inimese asukoht A ja objekti asukoht O. Objekti esimese peegeldus kujutis parempoolses peeglis on P. Objekti teise peegeldus parempoolses peeglis tekitab objekti kujutis vasakpoolses peeglis. Olgu kujutis vasakpoolses peeglis V ja selle kujutis parempoolses peeglis V'. Tähistame veel kaks punkti kujutisi ühendaval sirgel, punkt B, mis on inimese asukoha projektsiooni, ja punkt M, mis on lõikepunkt parempoolse peegliga.



Vaadates kasutades joonlauda objekti või selle peegeldust, tekivad meile sarnased kolmnurgad (vt joonist). Objekti näiv pikkus joonlaua kaugusel korrutatud objekti kaugusega vaatlejast on võrdne objekti tegeliku pikkuse ja joonlaua kauguse korrutisega. Sama suurusega on võrdsed ka kummagi peegelduse kauguse korrutis vastava peegelduse näiva pikkusega joonlaua kaugusel, kuna peegelduste tegelikud pikkused on sama suured kui objekti tegelik pikkus.



Teades näivate pikkuste suhet on meil nüüd võimalik leida kauguste suhted. Esimese peegelduse kaugus vaatlejast

$$AP = \frac{10\,\text{cm}}{7{,}5\,\text{cm}} \cdot AO = \frac{4}{3} AO$$

ja teise peegelduse kaugus vaatlejast

$$AV' = \frac{10\,\text{cm}}{3{,}75\,\text{cm}} \cdot AO = \frac{8}{3} AO.$$

Peegeldumise omadustest teame veel ka järgmisi pikkuseid: $OP = 60\,\text{cm}$ ja $OV' = 200\,\text{cm}$. Oleme nüüd teisendanud füüsikalise olukorra trigonomeetriaülesandeks, kus meie otsitav suurus on BM.

Üks võimalus lahendamiseks on kasutada Pythagorase teoreemi kolmnurkade $\triangle ABO$, $\triangle ABP$ ja $\triangle ABV'$ joaks. Sellest saame kolm võrrandit:

$$\begin{aligned} AO^2 &= AB^2 + BO^2, \\ AP^2 &= AB^2 + (BO + OP)^2, \\ AV'^2 &= AB^2 + (BO + OV')^2. \end{aligned}$$

Kasutades kauguste suhteid saame, et

$$\begin{aligned} \frac{16}{9}(AB^2 + BO^2) &= AB^2 + BO^2 + 2 \cdot BO \cdot OP + OP^2, \\ \frac{64}{9}(AB^2 + BO^2) &= AB^2 + BO^2 + 2 \cdot BO \cdot OV' + OV'^2. \end{aligned}$$

Elimineerime $(AB^2 + BO^2)$ saame:

$$7 \cdot (2 \cdot BO \cdot OV' + OV'^2) = 55 \cdot (2 \cdot BO \cdot OP + OP^2),$$

millest

$$BO = \frac{55 \cdot OP^2 - 7 \cdot OV'^2}{14 \cdot OV' - 110 \cdot OP} = \frac{410}{19}\text{cm} \approx 21{,}6\,\text{cm}.$$

Seega inimese kaugus parempoolsest peeglist

$$BM = BO + OM = 30\,\mathrm{cm} + \frac{410}{19}\mathrm{cm} = \frac{980}{19}\mathrm{cm} \approx 51{,}58\,\mathrm{cm}.$$

6. (*JAHTUMINE*) (*10 p.*) *Autor: Uku Andreas Reigo*

Vedelik kaotab aja t jooksul jahtudes soojushulga Q, mis on võrdeline jahutatava pindala S ja temperatuuride vahega ΔT: $Q =\propto tS\Delta T$. Kuna eeldame, et tihedus ja erisoojus ei sõltu temperatuurist, siis vedeliku temperatuuri langemise kiirus $\dot{T}$ on võrdeline ajaühukus kaotatud soojushulgaga ja pöördvõrdeline vedeliku ruumalaga V:

$$\dot{T} \propto \frac{Q}{Vt} \propto \frac{S\Delta T}{V}.$$

Leiame soojema kokku valatud vedeliku temperatuuri T_{segu} pärast soojusliku tasakaalu saabumist. Kuna kokku segatakse võrdsed kogused vedelikke, kehtib $T_{\mathrm{segu}} - T = T_{\mathrm{lisa}} - T_{\mathrm{segu}}$, millest

$$T_{\mathrm{segu}} = \frac{T + T_{\mathrm{lisa}}}{2} = \frac{40\,^\circ\mathrm{C} + 88\,^\circ\mathrm{C}}{2} = 64\,^\circ\mathrm{C}.$$

Kahe termose vedelikuga täidetud osad on sarnased koonused. Seega on nende täidetud ruumalad on proportsionaalsed kõrguse kuubiga ning põhjapindalad kõrguse ruuduga. Seega $S_2/S_1 = h_2^2/h_1^2$ ja $V_2/V_1 = h_2^3/h_1^3$, millest

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}.$$

Vedelike jahtumise suhe

$$\begin{aligned} k &= \frac{\dot{T}_2}{\dot{T}_1} \\ &= \frac{S_2}{S_1}\frac{V_1}{V_2}\frac{T_{\mathrm{segu}} - T_{\mathrm{õhk}}}{T - T_{\mathrm{õhk}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\frac{T_{\mathrm{segu}} - T_{\mathrm{õhk}}}{T - T_{\mathrm{õhk}}}. \end{aligned}$$

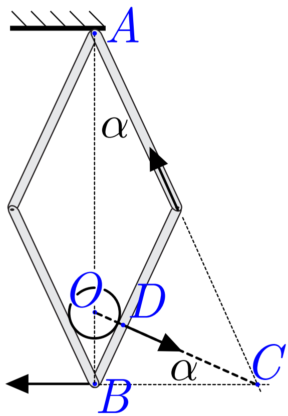
Millest

$$T_{õhk} = \frac{kT - \frac{T_{\mathrm{segu}}}{\sqrt[3]{2}}}{k - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1{,}62 \cdot 40\,^\circ\mathrm{C} - \frac{64\,^\circ\mathrm{C}}{\sqrt[3]{2}}}{1{,}62 - 1/\sqrt[3]{2}} = 17\,^\circ\mathrm{C}.$$

7. (*ROMB*) (*10 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Lahendus 1: Vaatleme parempoolse alumise varda tasakaalu, vt joonist. Talle mõjub kokku kolm jõudu. Esiteks on šarniirsesse kinnituspunkti B rakendatud vasakpoolse varda poolt mõjuv jõud, mis on sümmeetria tõttu horisontaalne. Et ülemisele vardale mõjub vaid kaks jõudu (üks ühes otsas ja teine teises otsas), siis peavad need mõlemad olema suunatud piki varrast (vastasel korral ei saaks rahuldada ülemisele vardale mõjuvate jõumomentide tasakaalutingimust). Seega mõjub alumisele vardale ülemises šarniirses kinnituspunktis jõud, mis on suunatud piki sirget AC. Peale selle mõjub alumisele vardale veel silindri toetuspunktis D normaaljõud, mis on suunatud risti vardaga.

Kuivõrd vardaid võib lugeda kaalutuiks, siis varrastele mõjuva raskusjõuga võib mitte arvestada. Kui jäigale kehale on rakendatud vaid kolm jõudu, siis peavad need lõikuma ühes punktis, vastasel korral ei oleks rahuldatud sellele kehale mõjuvate jõumomentide tasakaalutingimus. Seetõttu peab punkti D rakendatud jõu pikendus läbima punkti C. On lihtne näha, et $BC = 2l\sin\alpha$, mistõttu $OB = BC\tan\alpha = 2l\sin\alpha\tan\alpha$ ning $r = OD = OB\sin\alpha = 2l\sin^2\alpha\tan\alpha$.



Lahendus 2: Silinder avaldab vardale punktis D normaaljõudu N. Lisaks mõjub alumisele vardale ülemises šarniirses kinnituspunktis jõud T ülemise varda sihis. Saame kirjutada jõumomentide tasakaalu punkti B suhtes: $N\cdot|BD| = Tl\sin 2\alpha$. Jõudude tasakaal silindri jaoks on $2N\sin\alpha = mg$. Jõudude tasakaal punkti A jaoks on $2T\cos\alpha = mg$. Lahendades need kolm võrrandit, saame $|BD| = 2l\sin^2\alpha$ ning $r = |BD|\tan\alpha = 2l\sin^2\alpha\tan\alpha$.

Lahendus 3: Kasutame potentsiaalse energia miinimumi printsiipi: silinder on stabiilselt tasakaalus kui tema masskese on madalaimas võimalikus asendis.

Olgu lae kõrgus $2l$. Silindri keskpunkt asub kõrgusel

$$h(\alpha) = 2l - 2l\cos\alpha + \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Selle tuletis on

$$h'(\alpha) = 2l\sin\alpha - r\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Tingimusest $h'(\alpha) = 0$ leiame

$$r = 2l\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = 2l\sin^2\alpha\tan\alpha.$$

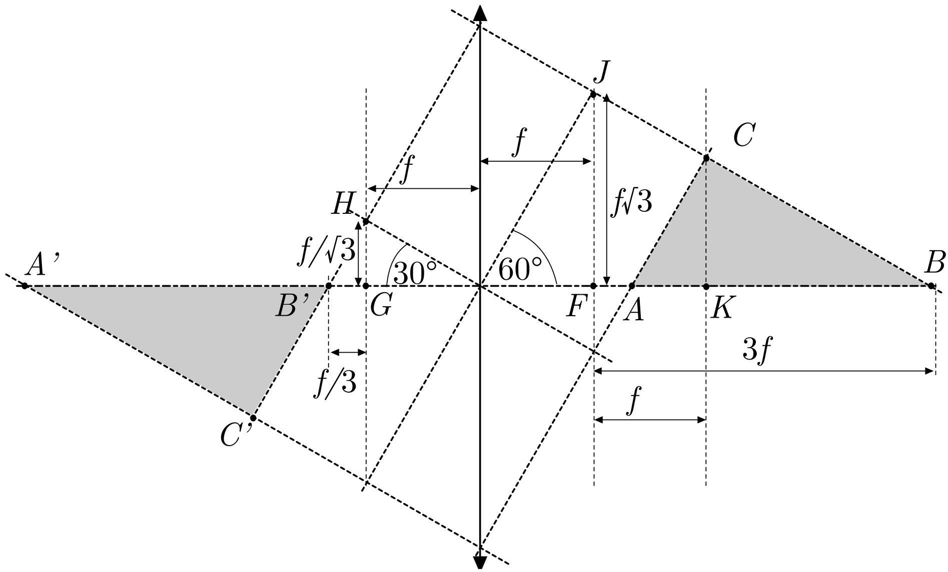
8. (*KOLMNURK*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Lahendus 1: Esiteks paneme tähele, et õhukeses läätses kujutub sirge sirgeks, kusjuures need sirged lõikuvad läätse tasapinnal. See muutub ilmseks, kui mõtleme neist sirgeist kui valguskiirtest.

Teiseks paneme tähele, et 30°-ne nurk peab kujutuma 60°-ks nurgaks ja vastupidi. Tõepoolest, kui 30°-ne nurk kujutuks 30°-ks nurgaks ja 60°-ne nurk kujutuks 60° nurgaks, peaksid esimese tähelepaneku tõttu olema kolmnurk ja tema kujutis peegelsümmeetrilised läätse tasapinna suhtes, mis on vastuolus mitme õhukese läätse omadusega, mh läätse valemiga.

Kolmandaks, optilisel teljel läätsest paremal on vaid üks punkt, kust telje suhtes 30° all lähtuv kiir murdub 30°-se kaldenurgaga kiireks. Tõepoolest, on lihtne näha, et mingist telje punktist X, mille kaugus läätsest on suurem fookuskaugusest f, 30° all lähtuva kiire kaldenurk peale läätsel murdumist on monotoonne funktsioon punkti X kaugusest fokaaltasandist.

Kolmanda tähelepaneku tõttu on ülesandel vaid üks lahend ning sümmeetria tõttu peavad kolmnurk ja tema kujutis olema täpselt ühesuurused ja samal kaugusel läätsest. Sestap peab algse kolmnurga täisnurk ning kujutiskolmnurga täisnurk olema läätsest võrdsel kaugusel; läätse valemist on lihtne järeldada, et see kaugus on $2f$. Newtoni valem läätse jaoks ütleb, et kui x_1 ja x_2 on eseme kaugused omapoolsest fokaaltasandist, siis $x_1x_2 = f^2$. Olgu täisnurkse kolmnurga täisnurga C projektsioon hüpotenuusile K (vt joonist) ning olgu kolmnurga kõrgus $|CK| = \sqrt{3}h$; sellisel juhul kaatetite projektsioonid hüpotenuusile $|AK| = |CK|\tan 30° = h$ ning $|KB| = |CK|\tan 60° = 3h$. Sümmeetria tõttu asub B kujutis B' fokaaltasandist sama kaugel, kui nurk A, seega Newtoni valem punkti B jaoks omandab kuju $(f-|AK|)(f+|KB|) = (f-h)(f+3h) = f^2$, millest $h = 2f/3$ (lahend $h = 0$ pole füüsikaline). Nüüd on juba lihtne leida hüpotenuusi pikkuse $|AK| + |KB| = 4h = 8f/3$.



Lahendus 2: Teeme esimesed kaks tähelepanekut nagu 1. lahenduses. Tõmbame läbi läätse keskpunkti kaks sirget, mis kulgevad vastavalt 30° ja 60° nurkade all nii nagu näidatud joonisel. Olgu nende sirgete lõikepunktid fokaaltasanditega vastavalt J ja H. On lihtne näha ,et $|JF| = f\tan 60° = \sqrt{3}f$ ning $|HG| = f\tan 30° = f/\sqrt{3}$. Vasakul pool läätse 60° all kulgevad kiired peavad läbima peale läätsel murdumist punkti J, sh peab seda tegema piki kujutiskolmnurga kaatetit $C'B'$ kulgev kiir, mis enne murdumist moodustab optilise teljega 60°-se nurga ning pärast läätses murdumist — 30°-se nurga.ning kulgema piki kaatetit CB. Täisnurksest kolmnurgast JFB saame avaldada $|FB| = |JF|\tan 60° = 3f$ ning täisnurksest kolmnurgast $B'HG$ saame avaldada $|B'G| = |HG|\tan 30° = f/3$. Sümmeetria tõttu $|FA| = |B'G| = f/3$, tänu millele kolmnurga hüpotenuus $|AB| = |FB| - |FA| = 3f - f/3 = \frac{8}{3}f$.

9. (*UDU*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist kujul $p = \frac{\rho}{\mu}RT$ saame võrrandi $\rho_k/\mu_a = \rho/\mu$, kus märja õhu keskmine molaarmass $\mu = (1-r)\mu_a + r\mu_v$ ning r tähistab veemolekulide suhtosa kõikide molekulide arvu. Sellest võrdusest saame avaldada $r = \frac{\mu_a}{\rho_k}\frac{\rho_k - \rho}{\mu_a - \mu_v} \approx 0{,}030$.

Moolide arvtiheduse saame kõige mugavamalt teada kuiva õhu andmetest: temperatuuril T_1 on see $n_0 = \rho_k/\mu_a$ ja järelikult temperatuuril T_2 — $n = \rho_k T_1/\mu_a T_2$. Seega, kui üleküllastunud aur ei kondenseeruks piiskadeks, oleks veeauru tihedus $\rho_v' = nr\mu_v = \rho_k r\frac{\mu_v}{\mu_a}\frac{T_1}{T_2} \approx 23{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Et see on suurem, kui ρ_m, siis osa veeaurust kondenseerub; tähistades vee molaarse osakaalu uue väärtuse r'-ga saame seose $\rho_m = nr'\mu_v$ ning võrreldes seda ρ'_v avaldisega näeme, et

$$r' = r\frac{\rho_m}{\rho'_v} \approx 0{,}012.$$

Vaatleme teatud hulka kuiva õhu molekule (st kõiki teisi õhus sisalduvaid molekule peale vee molekulide, edaspidi lihtsalt "õhumolekule"), mis täidavad enne kondenseerumist ruumala V ning peale kondenseerumist - ruumala V'. Et õhumolekulide hulk on enne ja pärast kondenseerumist sama, siis $(1-r)nV = (1-r')nV'$, millest $V/V' = \frac{1-r'}{1-r}$; siinjuures kasutasime fakti, et tulenevalt ideaalse gaasi olekuvõrrandile püsib konstantsel temperatuuril toimuva kondenseerumise käigus moolide arvtihedus muutumatuna.. Kuivõrd vee molekulid ei kadunud ära, vaid osa neist läks üksnes piiskadesse, siis vee ja kuiva õhu molekulide summaarne suhtarv ei muutunud, st uues ruumalas V' on ka vee molekule sama palju, kui enne oli ruumalas V. Seetõttu on neis ruumalades ka kogumassid võrdsed ning uduga õhu tiheduseks saame $\rho'' = \rho'\frac{1-r'}{1-r}$, kus $\rho' = \rho T_1/T_2$ tähistab niiske jahtunud õhu tihedust enne kondenseerumist. Niisiis

$$\rho'' = \rho\frac{T_1}{T_2}\frac{1-r'}{1-r} \approx 1254{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}.$$

10. (*KONDENSAATOR VEDELIKUS*) (*12 p.*) *Autor: Konstantin Dukatš*

Lahendus 1: Oletame, et kondensaatoril on ristkülikukujulised plaadid laiusega L ja kõrgusega H (tulemus ei sõltu kondensaatori kujust, kuid sellisel juhul on lahendus lihtsam). Kondensaatori vedeliku ja õhuga osi võib käsitleda paralleelsete kondensaatoritena. Olgu vedeliku tase kondensaatori sees h. Mahtuvused on siis:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 L(H-h)}{d},$$
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon L h}{d}.$$

Kondensaatori elektrostaatiline potentsiaalne energia on sellisel juhul

$$E = E_1 + E_2 = \frac{C_1V^2}{2} + \frac{C_2V^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 LHV^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 L(\varepsilon-1)V^2}{2d}h = \frac{VQ}{2},$$

kus Q on kondensaatori plaatide laeng. Edasi vaatleme kondensaatori ja pingeallika süsteemi summaarset potentsiaalset energiat E_{pot} sõltuvalt veetaseme kõrgusest. Kuna süsteem liigub madalaima potentsiaalse energiaga olekusse, kehtib tasakaaluasendis $\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}/\mathrm{d}h = 0$. Potentsiaalsesse energiasse panustub vee gravitatsiooniline potentsiaalne energia $mgh/2 = \rho L h^2 g/2$, kondensaatori elektrostaatiline potentsiaalne energia E ning lõpuks pingeallika potentsiaalne energia. Pingeallika potentsiaalse energia arvutamiseks on kõige turvalisem kujutada pingeallikat ette kui hästi suure mahtuvusega C_∞ kondensaatorit nõnda, et pingeallika potentsiaalne energia muut oleks $\mathrm{d}(C_\infty V^2/2) = \mathrm{d}(q^2/(2C_\infty)) = q\mathrm{d}q/C_\infty = V\mathrm{d}q$, kus C_∞ on pingeallika mahtuvus ja $\mathrm{d}q$ on pingeallikasse sisenev laeng (teisisõnu negatiivse märgiga võrreldes kondensaatorisse siseneva laenguga). Pingeallika potentsiaalne energia on seega kondensaatori pinge kaudu avaldatav kui $-VQ$. (Alternatiivselt oleksime võinud otse $-VQ$ kirjutada kasutades ära asjaolu, et elektrivälja tehtud töö on VQ mis on samas tõlgendatav kui negatiivne märk elektrivälja allikate potentsiaalse energia muuduga). Kokkuvõttes on potentsiaalne energia

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pot}} &= \frac{\rho L h^2 g}{2} + \frac{VQ}{2} - VQ = \\ &= \frac{\rho L h^2 g}{2} - \frac{\varepsilon_0 L H V^2}{2d} - \frac{\varepsilon_0 L(\varepsilon - 1)V^2}{2d} h. \end{aligned}$$

Kuna süsteem läheb madalaima energiaga olekusse:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}h} = -\frac{\varepsilon_0 L(\varepsilon - 1)V^2}{2d} + \rho L h g = 0.$$

Millest

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)V^2}{2\rho g d^2}.$$

Nagu oodatud, taandusid kondensaatori plaatide laiusi ja kõrgusi kirjeldavad suurused ära.

Lahendus 2: Nagu eelmiseski lahenduses eeldame lihtsuse mõttes, et kondensaatori plaadid on ristküliku kujulised laiusega (horisontaalsihis) L. Vedelikuga täidetud ja õhuga täidetud kondensaatoriosad on ühendatud rööbiti, seetõttu nende mahtuvused liituvad. Olgu vedelikuga täidetud kondensaatoriosa kõrgus a ja õhuga täidetud osa kõrgus b. Sellisel juhul kogumahtuvus $C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 L}{d}(\varepsilon a + b)$. Vaatleme olukorda, kus kondensaator on lahti ühendatud toitest ja seetõttu toiteallikas tööd ei saa teha. Sellisel juhul võtab süsteem madalaima potentsiaalse energiaga oleku, kus summaarne energia koosneb elektrostaatilisest osast $Q^2/2C$ ja gravitatsioonilisest osast $\frac{1}{2}\rho g h^2 L d$, kus $Q = VC$ säilib, sest plaadid on isoleeritud ja laeng ei saa neilt kuhugile ära minna. Niisiis on meie tingimus

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{1}{2}\rho g h^2 L d + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = \rho g h L d - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}h}.$$

Siinjuures

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}h} = \frac{\varepsilon_0 L}{d}(\varepsilon - 1),$$

sest $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}h} = 1$ ja $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}h} = -1$. Nüüd jääb üle vaid avaldada h asendades $Q/C = V$, tulemuseks on eelpooltoodud vastus.

Lahendus 3: Seni kuni vahemaa vedeliku nivoost plaatide vahel kuni plaatide ülemise servani on palju suurem, kui d, siis servaefektid plaatide servades on tühised. Aga mingis mõttes tõusebki nivoo just servaefektide tõttu. Jõu ruumtihedus on võrdne elektrivälja tuletisega polarisatsioonivektori sihis, st $(\vec{P} \cdot \nabla)\vec{E}$-ga ning plaatide alumise serva juures on elektriväli servaefektist tingitult mittehomogeenne, mis annabki tõstejõu.

Teame, et $\nabla \times \vec{E} = 0$, seega

$$0 = \vec{E} \cdot (\nabla \times E) = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\vec{E} \times \nabla)\vec{E},$$

seega jõud ruumalaühiku kohta on

$$(\vec{P} \cdot \nabla)\vec{E} - \nabla p = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \nabla p = \nabla\left[\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2 - p\right].$$

Tasakaaluolekus on see kõik null, st $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2 - p = \mathrm{const}$. Plaatide vahelt väljas on $E = 0$, seetõttu on sees rõhk $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2$, kus $E = V/d$, mis kergitabki nivoo $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 V^2/\rho g d^2$ võrra kõrgemale.

E1. (*OOMMEETER*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Esmalt mõõdame oommeetriga takistuse ning voltmeetriga patarei pinge, olgu need vastavalt R ja U. Seejärel ühendame patarei ja takisti järjestikku oommeetri klemmidele, sõltuvalt polaarsusest saame oommeetri näitudeks R_1 ja R_2, olgu $R_1 > R_2$. Oommeetri osuti kõrvalekalle on määratud oommeetrit läbiva voolutugevusega I ja näit oomides vastab eeldusele, et järjestikühenduses on lisaks mõõdetavale takistusele R ka oommeetri sisemine takistus r ja elektromotoorjõud V, seega kehtib seos $I = V/(R + r)$, millest $R = V/I - r$. Kui ahela summaarne elektromotoorjõud pole enam V vaid $V \pm U$, siis $I = \frac{V \pm U}{R+r}$, mistõttu

$$R_{1,2} = \frac{V}{I} - r = V\frac{R + r}{V \pm U} - r = \frac{VR \mp Ur}{V \pm U}.$$

Esmalt saame siit järeldada, et suurem takistus R_1 peab vastama miinusmärgile nimetajas, st olukorrale, mil patareide polaarsused on vastupidised. Niisiis on meil kaks võrrandit:

$$R_1 = \frac{VR + Ur}{V - U},$$
$$R_2 = \frac{VR - Ur}{V + U}.$$

Sellest võrrandisüsteemist saame avaldada

$$V = U\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2 - 2R}.$$

Saadud seos võimaldab meil arvutada mõõtmistulemuste põhjal pinge V väärtuse.

E2. (*VÄÄNDUV TAMIIL*) (*12 p.*) *Autor: Richard Luhtaru*

Riputame koormise tamiili otsa ja leiame vähemalt kolme erineva tamiili pikkuse jaoks $c = \kappa L$ väärtuse.

Leiame esmalt tamiili pikkuse L tavalise pendli abil, mõõtes stopperiga pendli võnkeperioodi T_p (parema täpsuse jaoks mõõdame N võnkeperioodi jaoks kuluva aja t ja leiame $T_p = \frac{t}{N}$). Teades, et matemaatilise pendli võnkeperiood on $T_p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (L peab olema piisavalt suur, et saaks koormise punktmassiks lähendada), leiame pendli pikkuse $L = g\left(\frac{T_p}{2\pi}\right)^2$.

Viime nüüd koormise tasakaaluasendisse ja pöörame koormist ümber oma telje nii, et tamiil püsib vertikaalselt. Pöördenurk peaks olema piisavalt suur, et võnkumine on visuaalselt hästi nähtav, aga piisavalt väike, et kehtiks Hooke'i seadus. Mõõdame stopperiga päripäeva-vastupäeva võnkumiste perioodi T_v (sarnaselt eelnevaga mõõdame parema täpsuse jaoks N perioodi ja jagame aja võngete arvuga). Kuna $\tau = I\alpha$ ja $\tau = -\kappa\theta$, siis koormise jaoks kehtib võrrand $\alpha = -\frac{\kappa}{I}\theta$. Paneme tähele, et see on analoogne vedrupendli liikumisvõrrandiga: $F = ma$ ja $F = -kx$, kust $a = -\frac{k}{m}x$. Teades, et vedrupendli jaoks on selle võrrandi lahend harmooniline võnkumine perioodiga $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, siis väändependli jaoks on lahend analoogselt pöördenurga harmooniline võnkumine perioodiga $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$. Järelikult $\kappa = I\left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2$.

Paneme tähele, et I arvutamiseks on vaja teada koormise raadiust R. Raadiuse hindamiseks loendame, mitu korda on võimalik tamiili ümber silindri keerata (mida pikem on L, seda täpsem). Kui tamiil pikkusega L teeb silindri ümber m keerdu (m võib olla murdarv), siis $m = \frac{L}{2\pi R}$ (eeldusel, et tamiili läbimõõt on tühine). Seega $R = \frac{L}{2\pi m}$. Koormise inertsimomendi leiame valemiga $I = \frac{1}{2}MR^2$, kus $M = 0{,}1\,\mathrm{kg}$.

Lõpuks arvutame iga L jaoks $c = \kappa L$ väärtuse ning leiame keskmise. Mõõtmistulemuste põhjal $R = 17{,}4\,\mathrm{mm}$ ja $c = 4{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$.

Füüsikaolümpiaadi ülesanded ja lahendused asuvad veebis aadressidel:
`https://www.teaduskool.ut.ee/olumpiaadid/fuusikaolumpiaad`
`https://efo.fyysika.ee`

Liituge meie Facebooki lehega:
`https://www.facebook.com/fyysikaolympiaad`