LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Периметр и площадь прямоугольника такие же как и у четвёртой части круга с радиусом 1. Найти размеры прямоугольника.

2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = 2 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

в действительных числах.

3. Чтобы настроиться на рабочий лад математик до начала рабочего для умножает все простые числа, которые не превышают его возраст в пересчёте на дни, и прибавляет к полученному произведению 1. Возможно ли, что в результате он получит квадрат целого числа?

4. Доказать неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F так, что

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Найти величину угла FAE.

6. Каждое целое число на числовой оси покрашено либо в синий, либо в красный цвет. Доказать, что найдутся три целых числа одного цвета, которые лежат на числовой оси через равные промежутки.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Длина стороны ромба равна 1 и величина одного внутреннего угла равна 45°. Найти длины диагоналей этого ромба и радиус вписанной окружности.

2. Найти все такие углы α, что $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.

3. Найдутся ли такие целые числа a, b, c и d, что $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ и $c+d$ являются шестью различными простыми числами?

4. Найти все такие действительные числа x, при которых $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.

5. На плоскости даны четыре горизонтальные прямые, причём расстояние между двумя верхними и расстояние между двумя нижними прямыми различны. Можно ли выбрать на каждой прямой одну точку так, чтобы при соединении этих точек отрезками образовался параллелограмм?

6. Натуральные числа от 1 до 100 записаны на клетчатой доске размером 10×10 так, что в каждом квадрате одно число и в каждом ряду числа расположены в возрастающем порядке. Каково наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Центр описанной окружности равнобедренного треугольника находится в точке начала координат, а конечные точки одной из боковых сторон имеют координаты $(-3, -1)$ и $(1, -3)$. Найти возможные координаты третьей вершины этого треугольника.

2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно оси y. Если отобразить её график относительно оси x и сдвинуть его на 2 единицы в положительном направлении оси x, то полученный в результате график и первоначальный график пересекут ось x в одной и той же точке, а их общая касательная в этой точке образует с осью x угол 45°. Найти все такие комплекты чисел (a, b, c).

3. Найти наименьшее положительное целое число, половина которого является квадратом некоторого целого числа и треть которого является кубом некоторого целого числа.

4. Общим членом последовательности $a_1, a_2, \ldots$ является $a_k = 2^k - 1$. Доказать, что если от произвольно выбранного члена этой последовательности вычесть сумму всех предыдущих членов, то в результате получится порядковый номер выбранного члена последовательности.

5. Доказать, что если гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза длиннее опущенной на неё высоты, то один из углов этого треугольника равен 15°.

6. На координатной плоскости в каждую точку с целочисленными координатами записано одно число, причём не все эти числа равны между собой и каждое из этих чисел является средним арифметическим чисел, записанных в четырёх ближайших соседних точках. Возможно ли, что

а) все записанные числа являются целыми;

б) все записанные числа являются натуральными?