

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

10 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Периметр и площадь прямоугольника такие же как и у четвёртой части круга с радиусом 1. Найти размеры прямоугольника.
2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{xy} = 2 \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

в действительных числах.

3. Чтобы настроиться на рабочий лад математик до начала рабочего дня умножает все простые числа, которые не превышают его возраст в пересчёте на дни, и прибавляет к полученному произведению 1. Возможно ли, что в результате он получит квадрат целого числа?
4. Доказать неравенство

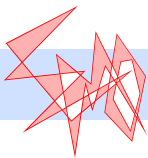
$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F так, что

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Найти величину угла FAE .

6. Каждое целое число на числовой оси покрашено либо в синий, либо в красный цвет. Доказать, что найдутся три целых числа одного цвета, которые лежат на числовой оси через равные промежутки.



LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

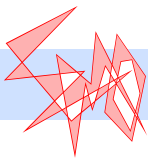
11 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Длина стороны ромба равна 1 и величина одного внутреннего угла равна 45° . Найти длины диагоналей этого ромба и радиус вписанной окружности.
2. Найти все такие углы α , что $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ и $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$.
3. Найдутся ли такие целые числа a , b , c и d , что $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ и $c + d$ являются шестью различными простыми числами?
4. Найти все такие действительные числа x , при которых $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.
5. На плоскости даны четыре горизонтальные прямые, причём расстояние между двумя верхними и расстояние между двумя нижними прямыми различны. Можно ли выбрать на каждой прямой одну точку так, чтобы при соединении этих точек отрезками образовался параллелограмм?
6. Натуральные числа от 1 до 100 записаны на клетчатой доске размером 10×10 так, что в каждом квадрате одно число и в каждом ряду числа расположены в возрастающем порядке. Каково наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца?



LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

12 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Центр описанной окружности равнобедренного треугольника находится в точке начала координат, а конечные точки одной из боковых сторон имеют координаты $(-3, -1)$ и $(1, -3)$. Найти возможные координаты третьей вершины этого треугольника.
2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно оси y . Если отобразить её график относительно оси x и сдвинуть его на 2 единицы в положительном направлении оси x , то полученный в результате график и первоначальный график пересекут ось x в одной и той же точке, а их общая касательная в этой точке образует с осью x угол 45° . Найти все такие комплекты чисел (a, b, c) .
3. Найти наименьшее положительное целое число, половина которого является квадратом некоторого целого числа и треть которого является кубом некоторого целого числа.
4. Общим членом последовательности a_1, a_2, \dots является $a_k = 2^k - 1$. Доказать, что если от произвольно выбранного члена этой последовательности вычесть сумму всех предыдущих членов, то в результате получится порядковый номер выбранного члена последовательности.
5. Доказать, что если гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза длиннее опущенной на неё высоты, то один из углов этого треугольника равен 15° .
6. На координатной плоскости в каждую точку с целочисленными координатами записано одно число, причём не все эти числа равны между собой и каждое из этих чисел является средним арифметическим чисел, записанных в четырёх ближайших соседних точках. Возможно ли, что
 - а) все записанные числа являются целыми;
 - б) все записанные числа являются натуральными?